

Salvatore Trotta

Valutazione analitica del Tensore di Eshelby per inclusioni poligonali e poliedrali

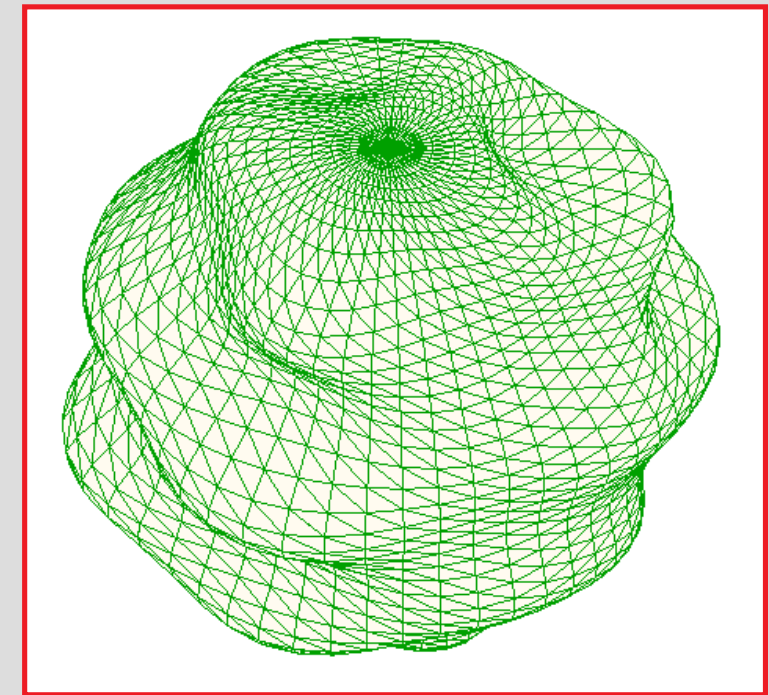


Università
degli Studi
di Napoli
Federico II

Dipartimento di
Strutture per
l'Ingegneria e
l'Architettura

Valutazione analitica del Tensore di Eshelby per Inclusioni poligonali e poliedrali

Salvatore Trotta



Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Costruzioni, XXVIII Ciclo

Valutazione analitica del Tensore di Eshelby per inclusioni poligonali e poliedrali

Salvatore Trotta

Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Costruzioni, XXVIII ciclo

Dipartimento di Strutture per l'Ingegneria e l'Architettura

Università degli Studi di Napoli Federico II

Via Claudio, 21 - 80125 Napoli

e-mail: salvatore.trotta@unina.it

Marzo, 2016

Tutor:

Prof. L. Rosati

Coordinatore del corso:

Prof. L. Rosati

Co-Tutor:

Ing. Francesco Marmo

a Gina

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il mio tutor, Prof. Luciano Rosati, per avermi dato la possibilità di studiare e fare ricerca su tematiche interessanti e stimolanti, per avermi guidato con professionalità, intelligenza, umanità e per avermi trasmesso parte della sua sempre viva passione per la ricerca e lo studio

Unitamente desidero ringraziare l'ing. Francesco Marmo, per i preziosi consigli, la costante disponibilità e che ha fornito un grande contributo all'attività di ricerca su cui si fonda questa tesi.

Un grazie ai miei due ex colleghi Cristoforo Demartino e Ferdinando Toraldo, con cui ho condiviso parte del mio percorso di dottorato, che non hanno mai fatto mancare il loro supporto e la loro amicizia.

Ringrazio i miei genitori perchè a loro devo la mia voglia di fare, di interrogarmi e di imparare, a loro devo gli strumenti e la forza che mi accompagnano in ogni istante della mia vita.

Non bastano poche righe per ringraziare Gina, per essere stata sempre al mio fianco in questi anni. A lei dedico questa tesi, perchè è grazie al suo amore, al suo appoggio incondizionato, alla sua forza e alla sua allegria che ho raggiunto i miei obiettivi.

Salvatore Trotta

Indice

1	Introduzione	9
2	Il Tensore di Eshelby \mathbb{S} e sue applicazioni	17
3	La teoria di Eshelby	23
3.1	Introduzione	23
3.2	Il campo di spostamento per un mezzo elastico	24
3.3	Il concetto di inclusione e di autodeformazione	27
3.4	La teoria di Eshelby per inclusioni ellissoidali	29
3.4.1	Inclusioni omogenee ellissoidali	30
3.4.2	Calcolo dei potenziali	34
3.4.3	Espressione di \mathbb{S} all'interno dell'inclusione	37
3.5	Un caso particolare: la sfera	39
3.6	Il principio di equivalenza di Eshelby	41
4	Struttura irriducibile, simmetria e media del tensore di Eshelby	47
4.1	Elementi del Tensore di Eshelby e decomposizione irriducibile	47
4.2	Struttura irriducibile nel caso bidimensionale	51
4.3	Struttura irriducibile nel caso tridimensionale	54
4.4	Simmetria del Tensore di Eshelby	57
4.5	Tensore di Eshelby Medio	59

5	Tensore di Eshelby per lo stato piano di deformazione	63
5.1	Introduzione	63
5.2	Espressione algebrica degli integrali $\mathbf{C}_{\bar{q}}$ e $\mathbb{C}_{\bar{q}}^{\hat{r}}$	67
5.3	Espressione algebrica di \mathbb{S} nel caso bidimensionale	70
5.4	Integrali sul generico lato di lunghezza unitaria	72
5.4.1	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}$	72
5.4.2	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^r$	73
5.4.3	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^{\bar{r}}$	73
5.4.4	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^{\hat{r}}$	74
5.4.5	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^{\bar{\hat{r}}}$	74
5.4.6	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^{\hat{\hat{r}}}$	75
6	Espressione analitica di \mathbb{S} per un'inclusione poliedrale	77
6.1	Introduzione	77
6.2	Calcolo integrali \mathbb{A}^f e \mathbf{a}^f	86
6.3	Valutazione analitica integrali sulla generica faccia	91
6.3.1	Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}$	91
6.3.2	Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}^r$	94
6.3.3	Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}^{\bar{r}}$	95
6.3.4	Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}^{\hat{r}}$	96
6.3.5	Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}^{\bar{\hat{r}}}$	97
6.3.6	Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}^{\hat{\hat{r}}}$	98
6.4	Integrali sul generico lato di lunghezza unitaria	100
6.4.1	Espressione algebrica dell'integrale I_q	101
6.4.2	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}q}$	101
6.4.3	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}\hat{q}}$	102
6.4.4	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\hat{q}}$	104
6.4.5	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\hat{q}}^r$	104
6.4.6	Espressione algebrica dell'integrale $I_{\hat{q}}^{\bar{r}}$	105

7	Applicazione nel caso bidimensionale: inclusione poligonale	107
7.0.7	Confronto con risultati riportati nell'esempio n.2 di Huang <i>e al-</i> <i>tri</i> [2009]	107
7.0.8	Confronto con risultati riportati nell'esempio n.3 di Huang <i>e al-</i> <i>tri</i> [2009]	110
7.0.9	Confronto con risultati riportati nell'esempio n.4 di Huang <i>e al-</i> <i>tri</i> [2009]	111
7.1	Tensore mediato sul dominio dell'inclusione	113
8	Applicazione nel caso tridimensionale: inclusione poliedrale	117
8.1	Caso della sfera	117
8.1.1	Confronto con risultati numerici esatti, nel caso della sfera . .	117
8.2	Esempi di Gao e Liu [2012]	123
8.2.1	Caso del cubo	123
8.2.2	Caso dello ottaedro	124
8.2.3	Caso del tetradecaedro	126
9	Omogeneizzazione	129
9.1	Introduzione all'omogeneizzazione	129
9.2	Il concetto dell'omogeneità equivalente	130
9.3	Proprietà effettive dei mezzi eterogenei	132
9.4	Caratterizzazione dei materiali eterogenei e delle strutture	140
9.5	Progetto dei materiali eterogenei e delle strutture	143
9.6	Modellazione micromeccanica di strutture complesse	145
9.7	Omogeneizzazione di compositi con effetto microstruttura e proprietà dinamiche effettive	146
9.8	Omogeneizzazione del tensore gradiente di deformazione di ordine superiore, di materiali con struttura periodica	148
9.9	Propagazione delle onde nei mezzi compositi	150
9.10	Tecniche cinetiche	153
9.11	Il volume elementare rappresentativo	154

9.12	Strumenti matematici di omogeneizzazione	158
9.13	Schemi di omogeneizzazione	161
9.13.1	La soluzione di Eshelby	162
9.13.2	Metodo self-consistent	163
9.13.3	Metodo Mori-Tanaka	164
9.13.4	Metodo di interpolazione di Lielens	164
9.13.5	Metodo di interpolazione Bound	165
9.13.6	Omogeneizzazione elasto-plastica	166
10	Conclusioni	169
A		171
A.1	Approfondimenti sul calcolo vettoriale	171
A.2	Espressione analitica del Tensore di Elasticità \mathbb{C}	172

Capitolo 1

Introduzione

La teoria di Eshelby è uno dei capitoli principali della cosiddetta micromeccanica, termine che nella letteratura scientifica viene usato in due accezioni differenti. Nella prima il termine *micromeccanica* viene usato per denotare la disciplina che studia le proprietà meccaniche (ma anche elettromagnetiche e termodinamiche) di materiali con assegnata microstruttura. Nella seconda accezione, si intende lo studio del comportamento dei materiali alle varie scale di osservazione, ovvero nanoscopica ($10^{-9}m$), microscopica ($10^{-6}m$), mesoscopica ($10^{-5} \div 10^{-3}m$) e macroscopica in cui il sistema in esame è misurabile e osservabile a occhio nudo.

La micromeccanica è recentemente diventata una parte indispensabile dei fondamenti teorici per ingegneri, in particolare per coloro che si applicano alle tecnologie emergenti come le nanotecnologie e le tecnologie biomediche. Nella meccanica applicata, il termine micromeccanica si riferisce specificatamente a tre scale di osservazione: scala degli atomi e delle molecole (nano-scala, con distanze tipiche dell'ordine di $10^{-10}m$), microstruttura (mesoscala, con distanze tipiche dell'ordine dei $10^{-9}m \div 10^{-6}m$) e scala macroscopica o fenomenologica (mm). Si può efficacemente sintetizzare dicendo che il programma complessivo della micromeccanica sia quello di analizzare la materia a partire dalla leggi fisiche fondamentali (meccanica quantistica), sino ad arrivare alle equazioni costitutive di un mezzo avente ogni grado di complessità strutturale. Come fase intermedia si hanno tutte le tecniche e teorie di omogenizzazione

utili per i materiali compositi e i mezzi eterogenei.

Dal punto di vista concettuale la micromeccanica si è sviluppata all'interno di un apparato analitico rigoroso e con tecniche computazionali avanzate. In particolare si può affermare che la microelasticità, nucleo centrale della micromeccanica, sia stata fondata tramite la definizione di *autodeformazione* (in inglese, *eigenstrain*), di *inclusione* (in inglese, *inclusion*) e l'elegante teoria di Eshelby [1957]. Si può inoltre affermare che tutte le moderne tecniche di analisi e progetto di materiali compositi di ogni tipo siano basati sulla presente teoria.

Il problema dell'inclusione è importante per due ragioni: innanzitutto può essere usato come modello principale per i fenomeni che coinvolgono espansioni termiche e trasformazioni strutturali nei solidi, Eshelby [1957] e Khachaturyan [2013]. In secondo luogo il problema dell'inclusione è strettamente correlato al problema elastico di una disomogeneità immersa in una matrice infinita, Eshelby [1957, 1959, 1961]. Al modello di inclusione è legato il concetto di autodeformazione, la quale è una deformazione anelastica ideale, che equivale alle deformazioni indotte da variazioni termiche nel primo caso e nel secondo rappresenta, l'interazione tra le proprietà elastiche della matrice indefinita e della disomogeneità.

In generale, le deformazioni elastiche nel mezzo indefinito dipendono dall'autodeformazione presente nell'inclusione e questa relazione è nella forma di una equazione integrale. Nel caso in cui l'inclusione ha la forma di ellissoide e internamente ad essa agisce un'autodeformazione uniforme, l'equazione integrale può essere risolta in forma analitica e il campo di deformazione elastico interno all'inclusione, risulta essere anch'esso uniforme. Inoltre Eshelby [1961] ipotizzò che l'ellissoide non condividesse questa particolare proprietà con nessun altro dominio limitato. Questo risultato è noto in letteratura come congettura di Eshelby. Data l'importanza della congettura di Eshelby, la dimostrazione di essa è tuttora una sfida per molti ricercatori.

Un certo numero di problemi di inclusione è stato risolto basandosi sul lavoro pionieristico di Eshelby e la maggior parte di essi si riferisce ad inclusioni ellissoidali. Ciò nonostante i problemi di inclusioni poligonali e poliedrali sono di grande interesse nelle applicazioni, in relazione a precipitati, in accoppiamenti e trasformazioni martensitiche in metallurgia e per i materiali compositi, dove sono utilizzati come rinforzi;

ad esempio, il SiC (Carburo di Silicio) è impiegato nei compositi a matrice ceramica o metallica, ed eutettici utilizzati nei compositi superconduttori. Tuttavia poco è stato fatto per risolvere problemi di inclusioni poligonali o poliedrali, perché il metodo di Eshelby coinvolge integrali di notevole complessità.

I campi elastici prodotti da un'inclusione cuboidale, con autodeformazioni costanti, sono stati calcolati da Faivre [1969], Sankaran e Laird [1976], Lee e Johnson [1977], Chiu [1977, 1978]. Viceversa, Owen [1972] e Chiu [1980] hanno considerato il problema di un'inclusione rettangolare, rispettivamente in un mezzo infinito e nel semispazio. Takao *e altri* [1981], hanno investigato il problema dell'inclusione cilindrica con lo scopo di esaminare gli effetti igrotermali in materiali compositi con fibre.

Per i cilindri circolari una soluzione completa fu derivata da Wu e Du [1995a,c]. Per i problemi bidimensionali, le soluzioni possono essere espresse usando la rappresentazione mediante variabili complesse (Sherman [1959], Gao e Ma [2010]).

Il primo lavoro relativo a inclusioni di forma non riconducibile a forme geometriche semplici, si deve a Rodin [1996]; egli ha presentato un algoritmo, per la soluzione in forma chiusa del problema dell'elasticità, per un'inclusione poligonale (caso 2D) e poliedrale (caso 3D), contenente una deformazione uniforme immersa in un mezzo infinito. Rodin [1996] si è interessato al problema dell'inclusione dopo aver letto un documento controverso di Mura [1987] nel quale si sosteneva che alcuni domini a forma di stella pentagonale condividessero la proprietà notevole dell'ellissoide citata in precedenza. Evidente implicazione di questa dichiarazione è che la congettura di Eshelby [1957] sia falsa.

Rodin [1996] e Markenscoff [1997] hanno provato che non esistono inclusioni poliedrali con tensore di Eshelby costante. Lubarda e Markenscoff [1998] hanno dimostrato che la proprietà di Eshelby (costanza della sollecitazione per autodeformazione costante) non vale per inclusioni delimitate da una superficie polinomiale con grado superiore al secondo, o per qualsiasi inclusione delimitata da una superficie non convessa. Essi hanno inoltre dimostrato che sono altresì precluse le inclusioni delimitate da segmenti o con due o più superfici differenti. Al contrario, tutte le altre soluzioni note per le inclusioni non ellissoidali non contraddicono la congettura di Eshelby [1957].

Rodin [1996] ha presentato un approccio al problema dell'inclusione che può essere applicato a qualsiasi numero di poligoni o poliedri di forma qualsiasi. Inoltre, egli ha provato che le singolarità nei vertici dei poligoni e dei poliedri non si annullano, eccetto per le inclusioni poligonali incompressibili i cui angoli sono entrambi $\pi/2$ oppure $3\pi/2$. Tuttavia l'algoritmo proposto da Rodin [1996] non riporta soluzioni esplicite e la corrispondente implementazione richiede una programmazione aggiuntiva, in particolare la rotazione delle coordinate e la rimozione delle singolarità. Successivamente, Nozaki e Taya [1997] hanno analizzato i campi elastici in un'inclusione poligonale convessa immersa in un mezzo infinito, sfruttando un procedimento ben noto per un'inclusione ellissoidale. Infatti, la frontiera dell'inclusione viene espressa in coordinate polari e, mediante passaggi alquanto elaborati, viene ricavata un'espressione in forma analitica del tensore di Eshelby \mathbb{S} , del tensore $\bar{\mathbb{S}}$ mediato sulla superficie dell'inclusione e dell'energia di deformazione. Inoltre Nozaki e Taya [1997] hanno proposto un metodo per la stima della rigidità effettiva di un composito con disomogeneità non ellissoidali. Essi hanno effettuato un'integrazione superficiale per ottenere il campo di spostamenti, suddividendo una regione poligonale in triangoli, e hanno differenziato il campo di spostamenti per ottenere il campo di deformazione e di sollecitazione. Infine hanno ricavato numericamente che, quando la forma di inclusione è un poligono regolare, la deformazione al centro dell'inclusione e l'energia di deformazione per unità di volume dell'inclusione hanno proprietà notevoli, ovvero

- i valori sono gli stessi di quelli di un'inclusione circolare salvo il caso di un'inclusione quadrata;
- l'orientamento dell'inclusione non influenza i valori tranne il caso in cui essa sia quadrata.

Sebbene Nozaki e Taya [1997] abbiano ottenuto delle espressioni esatte del tensore di Eshelby e del suo valore medio, esse erano troppo complesse per comprendere la causa delle suddette proprietà. Questo metodo è tuttavia limitato alla valutazione dei campi elastici all'interno dell'inclusione, mentre i punti esterni non vengono contemplati; inoltre non riesce a risolvere le singolarità nel caso di angoli acuti.

In Kawashita e Nozaki [2001], viene derivata dapprima una semplice espressione

del tensore di Eshelby nel caso dell'inclusione con autodeformazione e poi si ricavano i valori esatti del tensore \mathbb{S} nel centro dell'inclusione poligonale regolare e il valore del tensore $\bar{\mathbb{S}}$ mediato sul dominio dell'inclusione. Inoltre gli autori hanno fornito una giustificazione matematica dei risultati di Nozaki e Taya [1997].

Ru [1999] ha ottenuto la soluzione analitica dei campi elastici in un semispazio, contenente un'inclusione di forma arbitraria, usando tecniche di continuazione analitica e mappatura conforme. Questo modello soffre delle stesse limitazioni di quello proposto da Nozaki e Taya [1997]; infatti, è limitato alla valutazione dei soli campi elastici interni all'inclusione, e non riesce a risolvere le singolarità nel caso di angoli acuti.

Successivamente, Nozaki e Taya [2001] hanno ricavato le soluzioni per i campi elastici derivanti da inclusioni poliedrali arbitrarie, con autodeformazioni uniformemente distribuite in un corpo elastico infinito. Gli spostamenti sono espressi come integrali di volume sull'inclusione; successivamente vengono trasformati in integrali di superficie sulla frontiera dell'inclusione, sfruttando l'integrazione per parti. Gli integrali superficiali vengono valutati suddividendo la superficie in triangoli rettangoli come mostrato in Waldvogel [1979]. Le soluzioni in termini di deformazioni, sollecitazioni ed il tensore di Eshelby, sono ottenute mediante la differenziazione dei campi di spostamento. Successivamente, gli autori hanno calcolato l'energia di deformazione del corpo, usando delle formule di integrazione numeriche per semplici $3D$, Hammer e altri [1956].

Wang e Xu [2004], hanno dimostrato matematicamente che per un'inclusione rotazionale simmetrica con N lati, dove $N \geq 3$ e $N \neq 4$, la media aritmetica del tensore di Eshelby in N punti simmetrici rotazionali dell'inclusione è lo stesso del tensore di Eshelby per un'inclusione circolare e indipendente dall'orientamento dell'inclusione. Inoltre, gli autori dimostrano che il tensore Eshelby calcolato nel baricentro dell'inclusione e il tensore Eshelby mediato sul dominio dell'inclusione simmetrica, è identico al tensore di Eshelby per un'inclusione circolare e indipendente dall'orientamento dell'inclusione. I risultati ottenuti da Wang e Xu [2004], indicano che, sebbene la congettura di Eshelby sia falsa per inclusioni non ellissoidali, l'inclusione simmetrica rotazionale possiede la struttura della media aritmetica che può essere applicata allo studio dei

materiali compositi.

In Huang *e altri* [2009] viene ricavata l'espressione di \mathbb{S} nel caso di un'inclusione poligonale $2D$ debolmente non circolare, ossia una circonferenza rugosa. Le maggiori difficoltà per ottenere l'espressione esplicita sono le singolarità nelle espressioni degli integrali di superfici e la complessità di descrivere la forma di una arbitraria inclusione $2D$. Gli autori introducono delle funzioni di forma per descrivere la frontiera dell'inclusione e di esse eseguono lo sviluppo in serie in modo da ricavare l'espressione del tensore \mathbb{S} sia all'interno che all'esterno dell'inclusione. A partire dalle funzioni di forma della frontiera, ed eseguendo l'integrazione rapportata all'area dell'inclusione, gli autori ottengono l'espressione in forma esplicita del valore medio $\bar{\mathbb{S}}$ del tensore di Eshelby.

Tradizionalmente, il problema dell'inclusione è generalmente risolto impiegando la funzione di Green per il campo di spostamento; il campo di sollecitazione viene successivamente determinato una volta nota il campo di deformazione, a sua volta ottenuto in termini del tensore di Eshelby. Tuttavia, Jin *e altri* [2009b] hanno sviluppato una soluzione esplicita per una funzione di Green complementare, che è in grado di valutare direttamente il campo di sollecitazione prodotto da un'autodeformazione puntuale in un mezzo piano elastico infinitamente esteso. Quando l'obiettivo principale è ricavare il campo di sollecitazione, le derivate della funzione di Green per le sollecitazioni sono ricavate in maniera semplice e veloce. Come dimostrato in Jin *e altri* [2009b], questo metodo è direttamente applicabile ai problemi con autodeformazioni non uniformi ed è efficace per risolvere campi di tensione sia interni che esterni all'inclusione. Questi vantaggi possono essere utili per superare alcune limitazioni delle soluzioni esistenti nel caso delle inclusioni $2D$ Rodin [1996], Nozaki e Taya [1997], Ru [1999], Cheng *e altri* [1999]. In Jin *e altri* [2009a] gli autori riportano i risultati analitici per un'inclusione poligonale, confermando l'efficacia della metodologia proposta in Jin *e altri* [2009b]. Zou *e altri* [2010] ricavano le espressioni in forma chiusa dei tensori \mathbb{S} e $\bar{\mathbb{S}}$, nel caso di inclusioni piane la cui frontiera è espressa con polinomi di Laurent.

In Huang *e altri* [2011] viene ricavata l'espressione di \mathbb{S} nel caso di un'inclusione poliedrale debolmente non sferica, ossia una superficie sferica rugosa. Le maggiori difficoltà per ottenere l'espressione esplicita sono le singolarità nelle espressioni degli

integrali di volume e la complessità nel descrivere la forma di una arbitraria inclusione 3D. Gli autori introducono delle funzioni di forma per descrivere la frontiera dell'inclusione e di esse eseguono lo sviluppo in serie in modo da ricavare l'espressione del tensore \mathbb{S} sia all'interno che all'esterno dell'inclusione.

In Gao e Liu [2012] viene risolto analiticamente il problema tipico di Eshelby di un'arbitraria inclusione di forma poliedrale immersa in un mezzo infinito, elastico, isotropo ed omogeneo, utilizzando una teoria semplificata del gradiente di deformazione elastica *SSGET* che contiene un parametro di scala di lunghezza dell'inclusione rispetto al materiale. Il tensore di Eshelby derivato viene separato in una parte classica e una parte gradiente; la prima contiene solo il rapporto di Poisson, mentre la seconda include un parametro di scala del materiale. La presenza del parametro di scala consente di interpretare l'effetto della dimensione dell'inclusione. Ovviamente, quando non viene considerato il parametro di scala, il tensore \mathbb{S} calcolato con l'approccio *SSGET*, si riduce a quello calcolato con l'approccio classico. Nel lavoro viene ricavata anche l'espressione del tensore $\bar{\mathbb{S}}$, ossia il tensore di Eshelby mediato sul volume dell'inclusione poliedrale. In base alle analisi numeriche eseguite gli autori hanno verificato che, quando l'inclusione è di piccole dimensioni rispetto alla matrice, il contributo della parte gradiente è significativamente grande e non può essere trascurato. Gli stessi autori hanno altresì osservato che anche le componenti del tensore di Eshelby medio variano con le dimensioni dell'inclusione; in particolare più piccola è l'inclusione, minori sono le componenti di $\bar{\mathbb{S}}$.

Dalla letteratura emerge come il problema della singolarità degli integrali di volume nel caso tridimensionale e di superficie nel caso bidimensionale, risulti essere tutt'altro che risolto.

In questo lavoro di tesi sono state ricavate le espressioni in forma chiusa dei tensori \mathbb{S} , nel caso di inclusioni tridimensionali e nel caso di inclusioni poligonali bidimensionali (stato piano di deformazione). Nel caso tridimensionale, la frontiera è costituita da un poliedro, mentre nel caso bidimensionale, la frontiera dell'inclusione è costituita da un poligono. A partire dalla funzione di Green per il campo di spostamento \mathbf{u} , ed effettuandone le derivate parziali, si giunge ad una espressione in forma chiusa del tensore di Eshelby \mathbb{S} . Nello sviluppo degli integrali, facendo ricorso a successive applicazioni

del teorema di Gauss, gli integrali di volume originari, vengono ridotti ad integrali di linea.

Per l'inclusione poliedrale, il tensore \mathbb{S} è definito da un integrale di volume dell'inclusione; applicando il teorema di Gauss, si passa ad un integrale definito sulla superficie dell'inclusione, sicché applicando nuovamente il teorema di Gauss si ottengono integrali di linea definiti su ciascuno spigolo dell'inclusione poliedrica. Per l'inclusione poligonale, il tensore \mathbb{S} è definito da un integrale di superficie, per cui applicando il teorema di Gauss, si ottiene un integrale di linea, definito sui lati del poligono che rappresenta l'inclusione. Inoltre è stato risolto il problema delle singolarità in corrispondenza degli spigoli del poliedro, sfruttando l'approccio proposto e ampiamente testato da D'Urso [2013, 2014a,b, 2015b]; D'Urso e Marmo [2015] e D'Urso e Trotta [2015].

La tesi è così strutturata: nel capitolo 3 viene ripresa la teoria di Eshleby; nel capitolo 4 vengono riportate le proprietà più importanti del tensore \mathbb{S} ; nel capitolo 5, viene sviluppata la teoria di Eshelby per il caso dello stato piano di deformazione con inclusioni poligonali; nel capitolo 6, viene sviluppata la teoria di Eshelby per inclusioni poliedrali; nel capitolo 7 vengono presentati i risultati numerici ottenuti impiegando l'algoritmo implementato per l'inclusione poligonale; nel capitolo 8 vengono presentati i risultati numerici ottenuti impiegando l'algoritmo implementato per l'inclusione poliedrale; nel capitolo 9, viene ripresa la teoria dell'omogeneizzazione, nella quale il problema di Eshelby, trova grande applicazione.

Capitolo 2

Il Tensore di Eshelby \mathbb{S} e sue applicazioni

Dato un mezzo omogeneo indefinito soggetto ad un sistema di carichi remoti, per equilibrio, nei punti interni al mezzo si generano dei campi di sollecitazione, legati ai campi di deformazione tramite le proprietà elastiche del mezzo. Quando all'interno del mezzo viene introdotta una disomogeneità, cioè un mezzo con estensioni finite con proprietà elastiche differenti, i campi elastici nel mezzo iniziale, subiscono delle perturbazioni. La teoria di Eshelby ha come obiettivo quello di studiare le perturbazioni dei campi elastici nel mezzo, dovute all'inserimento della disomogeneità. Lo strumento matematico mediante il quale è possibile raggiungere tale obiettivo è una funzione tensoriale del quarto ordine, funzione del punto nella quale viene calcolata: tale funzione è detta Tensore di Eshelby \mathbb{S} , in onore dello scopritore John Douglas Eshelby, il quale per primo ne provò l'esistenza. In definitiva, possiamo dire che l'obiettivo finale della teoria di Eshelby, sia quello di ricavare l'espressione di \mathbb{S} per la particolare forma della disomogeneità. Eshelby dimostrò che per le disomogeneità ellissoidali soggette a deformazioni uniformi, l'espressione del tensore \mathbb{S} risultava essere costante nei punti interni alla disomogeneità, quindi indipendente dalla grandezza dell'ellissoide e dal punto nel quale si calcola. Queste importanti proprietà hanno dato luogo a

innumerevoli applicazioni del tensore \mathbb{S} .

La teoria di Eshelby ha immediate applicazioni in un vasto campo di situazioni meccaniche e fisiche di grande interesse nella micromeccanica. Un primo campo di applicazione del Tensore di Eshelby è la meccanica della frattura Colombo e Giordano [2007], Muller *e altri* [1994]. La frattura è quel complesso di fenomeni che portano alla rottura di un materiale. Questi fenomeni vanno dalla scala nanometrica¹ (coinvolgendo eventi di rottura dei legami chimici tra atomi e di interazione tra difetti puntuali e/o estesi) fino alla scala macroscopica² (determinando l'innesco, la propagazione e il frastagliamento dei fronti di frattura). Le modalità di frattura sono molteplici e dipendono non solo dalle caratteristiche fisiche e chimiche del materiale, ma anche dalle specifiche condizioni di carico meccanico cui esso è soggetto nonché dalla sua storia (quest'ultimo aspetto è noto come fatica dei materiali). Le due configurazioni geometriche tradizionalmente impiegate, sono la cricca di Griffith (*slit crack*) e la cricca circolare (*circular crack*). Queste due differenti geometrie, sebbene particolarmente semplici, contengono tutte le caratteristiche principali di interesse della meccanica della frattura lineare elastica (in inglese, *linear elastic fracture mechanics*, *LEFM*). Per la meccanica della frattura, sfruttando la teoria di Eshelby, è stata ottenuta una soluzione analitica completa in termini di spostamento. In particolare le due configurazioni paradigmatiche della frattura, sono approssimate variando opportunamente gli assi dell'ellissoide.

Gli strumenti matematici a disposizione, impongono uno studio dei processi di frattura nelle ipotesi che le cricche siano di forma ellissoidale: in breve, non è possibile eseguire lo studio dei processi di frattura con una cricca di forma qualsiasi.

Passando ad una scala più grande, in particolare alla geomeccanica, diverse caratteristiche geologiche, come guasti e falde acquifere possono essere modellati come inclusioni non omogenee. La distribuzione delle sollecitazioni dentro ed intorno a serbatoi, acquiferi, intrusioni, zone di faglia, caverne, dighe, bande di compattazione, e strutture in sottterraneo può essere calcolata utilizzando la tecnica Eshelby: Rudnicki [2011]. Queste strutture geologiche possono avere diverse proprietà dei materiali e le

¹grandezze dell'ordine dei $10^{-9}m$

²un osservatore è in grado di osservare ad occhio nudo l'intera estensione del mezzo

condizioni di deformazione diverse, piuttosto che quella dei loro dintorni: Rudnicki *e altri* [1999]; Rudnicki [2002]; Walsh [2002]; Soltanzadeh *e altri* [2007].

Recenti applicazioni della teoria di Eshelby, sono state eseguite anche nel campo della medicina. In particolare Shin *e altri* [2015] hanno modellato il tumore al seno come un'inclusione elastica con differenti proprietà elastiche da quella della matrice circostante, nei casi in cui la deformazione è piccola. Applicando la soluzione di Eshelby, gli autori hanno previsto i campi di sollecitazione e di deformazione del seno contenente la lesione sospetta. Poiché le lesioni patologiche sono normalmente più rigide rispetto ai tessuti benigni, la deformazione nella lesione risulta essere inferiore rispetto al tessuto circostante.

Altro campo di applicazione è lo studio dei problemi di contatto; ad esempio, Chen *e altri* [2010] sviluppano un modello semianalitico per risolvere problemi tridimensionali di contatto elasto-plastico che coinvolgono materiali stratificati. La presenza dello strato di rivestimento disturba le deformazioni di contatto, quindi le sollecitazioni e la plasticità, rispetto al problema del semispazio costituito da un solo mezzo. Applicando la teoria di Eshelby, il substrato è sostituito da un'inclusione omogenea che occupa lo spazio del rivestimento e possiede una deformazione fittizia. Così il disturbo della sollecitazione prodotto dalla disomogeneità materiale dello strato, è modellato mediante delle antisollecitazioni dovute alle autodeformazioni interne all'inclusione.

Le principali applicazioni della teoria di Eshelby, sono impiegate per lo studio e la progettazione dei materiali compositi. I materiali presenti in natura possiedono una varietà di forme con una vasta gamma di proprietà. Tuttavia un solo materiale non sempre è in grado di fornire il perfetto equilibrio tra le proprietà necessarie alla particolare applicazione. Sperimentalmente si è visto che spesso miscele di materiali danno luogo a vantaggi in termini di proprietà ricercate.

La progettazione di questi materiali, ma anche lo studio dei materiali presenti in natura³, a rigore dovrebbe essere condotta a livello della disomogeneità, con analisi che garantiscano la continuità della sollecitazione e dello spostamento attraverso tutte le interfacce: cosa alquanto impossibile. Per questo motivo si ricorre alle tecni-

³questi, ad una scala sufficientemente piccola sono tutti eterogenei

che di omogeneizzazione, le quali comportano dei processi di media statistica per cui, l'effettiva costituzione e struttura del materiale sono idealizzate come quelle in cui il materiale viene considerato come continuo omogeneo.

Nei modelli di omogeneizzazione dei materiali compositi, viene impiegato il termine "inclusione" per indicare la fase di rinforzo. Le inclusioni possono essere particelle, fibre (lunghe o corte) o piatte e grani. Ci sono molti esempi industriali dei compositi, ad esempio:

- compositi a matrice polimerica (PMCs) rinforzati con fibre di ceramica, di vetro o di Kevlar, aventi come obiettivo l'incremento della rigidità e della resistenza, ad esempio gli scafi delle imbarcazioni, le ali degli aerei, parti delle automobili (fotogrammi del corpo, pannelli del cofano e delle porte), attrezzature sportive;
- matrice polimerica con particelle di gomma a basso modulo, aventi come obiettivo l'aumento della robustezza e della resistenza agli urti, ad esempio i paraurti;
- matrice di gomma con particelle di carbonio nero, aventi come obiettivo l'innalzamento della robustezza e della rigidità, ad esempio i pneumatici;
- compositi a matrice metallica (MMC) con particelle di ceramica o di fibre corte, aventi come principale obiettivo le applicazioni ad alta temperatura, ad esempio i componenti per motori a combustibili fossili (turbocompressori);
- matrice in calcestruzzo con fibre metalliche (resistenza in trazione o flessione), polimeri o fibre naturali (migliore duttilità e bassa densità), inclusioni di gomma (resistente agli urti e isolamento acustico).

Dovendo eseguire la media statistica, nelle tecniche di omogeneizzazione si considera il valore medio $\bar{\mathbb{S}}$ del tensore di Eshelby. Le tipologie di materiali compositi sono numerose, e conseguentemente le applicazioni di \mathbb{S} .

Ad esempio Withers *e altri* [1989], sfruttano la teoria di Eshelby per fornire una base teorica rigorosa per il calcolo delle proprietà meccaniche dei compositi in fibra corta.

In Zou *e altri* [2010] il problema dell'inclusione di Eshelby, viene applicato ad un mezzo omogeneo infinito contenente un sottodominio, chiamato inclusione termica sul quale agisce un flusso di calore costante.

Il problema di Eshelby è stato utilizzato anche per risolvere problemi complessi come disomogeneità lamellari Shodja e Ojaghnezhad [2007], nell'interazione tra disomogeneità multifasiche e disomogeneità lamellari Ojaghnezhad e Shodja [2009], nelle inclusioni policristalline Voyiadjis e Deliktas [2010]. L'efficienza computazionale, ha permesso di risolvere il problema delle disomogeneità poroelastiche Chen [2011]; Soltanzadeh e Hawkes [2012]; Bedayat e Dahi [1998]; Bedayat e Taleghani [2014, 2015a]. Nel suo lavoro Johannesson e Pedersen [1998], applica la teoria di Eshelby per calcolare le sollecitazioni interne effettive di compositi termomeccanici, al variare della distribuzione delle fibre.

Il problema dell'inclusione termica è matematicamente più semplice rispetto al suo omologo elastico, inoltre la conduzione termica è analoga ai fenomeni di trasporto come la conduzione elettrica, dielettrici, magnetismo, diffusione e flusso nei mezzi porosi.

Nei problemi con inclusioni di forma granulare, la trattazione classica, cioè con l'ipotesi di inclusioni ellissoidali, non è applicabile.

Tenendo conto che le disomogeneità possono avere forme qualsiasi, è evidente che la teoria di Eshelby è del tutto attuale: considerare inclusioni con forme differenti da quella ideale quale l'ellissoide, è necessario per eseguire delle analisi più rigorose, e ottenere risultati più affidabili.

Capitolo 3

La teoria di Eshelby

3.1 Introduzione

Per introdurre la complessa teoria di Eshelby, si consideri brevemente il problema concettuale di base, nel caso di un mezzo elastico lineare omogeneo ed isotropo, esteso in tutto lo spazio tridimensionale. Tale mezzo sia inizialmente posto in una condizione di equilibrio statico in assenza di forze applicate (sicché lo stato di riferimento presenta deformazione nulla). Si supponga, di rimuovere dal mezzo una regione ellissoidale e di sostituirla con un mezzo elastico differente. Anche la regione sostituita presenti inizialmente una deformazione nulla. Il sistema risultante è quindi formato da un mezzo contenente una disomogeneità. Quando il sistema complessivo viene sottoposto a tensioni elastiche, mediante forze applicate all'infinito, si crea un particolare campo di deformazioni, dovuto alla presenza della disomogeneità inserita nel mezzo. La teoria di Eshelby risolve completamente il problema matematico di una disomogeneità elastica, nel caso in cui gli sforzi all'infinito siano rappresentati da un campo uniforme Eshelby [1957, 1959]. È opportuno ricordare che se tali sforzi fossero applicati ad un mezzo omogeneo (senza disomogeneità) al suo interno, si produrrebbero dei campi elastici uniformi.

La teoria di Eshelby, inoltre, fa uso di un artificio fisico-matematico basato sul concetto di *inclusione*. Esso rappresenta un brillante espediente che consente di risolvere

il problema della disomogeneità.

L'inclusione non è fisicamente equivalente ad una disomogeneità; essa rappresenta un oggetto particolare con proprietà opportune. I due concetti sono legati dal principio di equivalenza di Eshelby che sarà approfondito successivamente. Talvolta in letteratura si trovano i due termini usati per descrivere lo stesso concetto; tuttavia per evitare confusione, in questa tesi ciascun termine sarà usato rigorosamente in base alle definizioni proprie.

3.2 Il campo di spostamento per un mezzo elastico

Si consideri un mezzo lineare omogeneo ed isotropo; l'equazione costitutiva del mezzo sarà:

$$T_{ij} = C_{ijkh} \epsilon_{kh} \quad (3.1)$$

dove C_{ijkh} indica il tensore di elasticità del mezzo definito nell'equazione (3.1):

$$C_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \quad (3.2)$$

Le equazioni fondamentali dell'elasticità, possono essere poste in una forma esplicita molto utile per le applicazioni, in quanto tale forma prevede come unica incognita il vettore spostamento \mathbf{u}

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

Si consideri una forza agente in un solo punto di un mezzo elastico infinito tridimensionale. Tale forza concentrata è espressa dal punto di vista matematico tramite una funzione delta di Dirac tridimensionale $\delta(\mathbf{r})$ che, per fissare le idee, si ipotizza centrata nell'origine degli assi (ogni altra disposizione è riconducibile a questa mediante una traslazione). Per gli scopi della presente tesi sarà considerato esclusivamente il caso statico. L'equazione (3.3) si specializza nella seguente espressione

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.4)$$

in componenti

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \mu \nabla^2 u_k + F_k \delta(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.5)$$

dove è lasciata sottointesa la somma sull'indice k , mentre \mathbf{u} rappresenta il vettore posizione (x_1, x_2, x_3) . Si osservi, per completezza, che la funzione $\delta(\mathbf{r})$ ha dimensioni $1/m^3$ e, quindi, il vettore \mathbf{F} rappresenta una forza efficace misurata in N [essendo $\mathbf{b} = \mathbf{F}\delta(\mathbf{r})$ una densità di forza cioè una forza per unità di volume]. Utilizzando il metodo delle trasformate di Fourier si può riscrivere l'equazione (3.5) nel dominio trasformato

$$\mu\kappa_i\kappa_i U_k(\boldsymbol{\kappa}) + (\lambda + \mu) \kappa_k \kappa_i U_i(\boldsymbol{\kappa}) = F_k \quad (3.6)$$

dove gli spostamenti $u_k(\mathbf{r})$ sono stati trasformati nelle funzioni $U_k(\boldsymbol{\kappa})$. La variabile Fourier-trasformata del vettore posizione \mathbf{r} è stata indicata con $\boldsymbol{\kappa}$.

Inoltre, è stata impiegata la proprietà della funzione delta di Dirac la cui trasformata di Fourier vale sempre 1. Con questa procedura un problema differenziale è stato trasformato in un problema algebrico facilmente risolvibile. Moltiplicando l'equazione (3.6) per κ_k e sommando sull'indice k si ha

$$\mu\kappa_i\kappa_i\kappa_k U_k(\boldsymbol{\kappa}) + (\lambda + \mu) \kappa_k \kappa_k \kappa_i U_i(\boldsymbol{\kappa}) = \kappa_k F_k \quad (3.7)$$

e cioè

$$[\mu\kappa_i\kappa_i + (\lambda + \mu) \kappa_i\kappa_i] \kappa_k U_k(\boldsymbol{\kappa}) = \kappa_k F_k \quad (3.8)$$

Allora $\kappa_k U_k(\boldsymbol{\kappa})$ sarà

$$\kappa_k U_k(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\kappa_i F_i}{(\lambda + 2\mu) \kappa_i \kappa_i} \quad (3.9)$$

Sostituendo l'equazione (3.9) nell'equazione (3.6) si ottiene

$$\mu\kappa_i\kappa_i U_k(\boldsymbol{\kappa}) + (\lambda + \mu) \kappa_k \frac{\kappa_i F_i}{(\lambda + 2\mu) \kappa_i \kappa_i} = F_k \quad (3.10)$$

da cui si determina la trasformata di Fourier delle soluzioni

$$U_k(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{F_k}{\mu\kappa_i\kappa_i} - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\kappa_i \kappa_i F_i}{(\kappa_i \kappa_i)^2} \quad (3.11)$$

Per completare la procedura è necessario antitrasformare l'equazione (3.11) ottenendo, quindi, gli spostamenti effettivi.

Pertanto, nell'equazione (3.11) si introducono le seguenti identificazioni

$$\frac{1}{\kappa_i \kappa_i} = \frac{1}{\kappa^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(\kappa_i \kappa_i)^2} = \frac{1}{\kappa^4} \quad (3.12)$$

in modo che l'equazione (3.11) possa essere più semplicemente riscritta nella forma

$$U_k(\kappa) = \frac{F_k}{\mu\kappa^2} - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\kappa_i \kappa_i F_i}{\kappa^4} \quad (3.13)$$

Si possono ora adottare le seguenti regole di trasformazione

$$\frac{1}{\kappa^2} \rightarrow \frac{1}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\kappa^4} \rightarrow -\frac{r}{8\pi} \quad \text{e} \quad \kappa_k \kappa_i \rightarrow \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \left(-i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \quad (3.14)$$

Si ottiene allora la prima versione della soluzione negli spostamenti effettivi nello spazio diretto:

$$u_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{F_k}{r} - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_i} F_i \right] \quad (3.15)$$

Per gli sviluppi futuri è conveniente calcolare anche le derivate parziali

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{x_i x_k}{r^3} \quad (3.17)$$

Usando quest'ultima derivata parziale mista nell'equazione (3.15) si ottiene il risultato fondamentale nella forma seguente

$$u_k(\mathbf{r}) = G_{ki}(\mathbf{r}) F_i \quad (3.18)$$

dove $G_{ki}(\mathbf{r})$ rappresenta la *funzione di Green per la teoria dell'elasticità*:

$$G_{ki}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r} \left[(\lambda + 3\mu)\delta_{ki} + (\lambda + \mu) \frac{x_k x_i}{r^2} \right] \quad (3.19)$$

Questa relazione è scrivibile anche in funzione del modulo di Young E e del coefficiente di Poisson ν

$$G_{ki}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi E r} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left[(3 - 4\nu)\delta_{ki} + \frac{x_k x_i}{r^2} \right] \quad (3.20)$$

Talvolta, la funzione di Green è utile nella forma in cui compaiono il modulo di taglio μ ed il coefficiente di Poisson ν

$$G_{ki}(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\mu r} \frac{1}{1 - \nu} \left[(3 - 4\nu)\delta_{ki} + \frac{x_k x_i}{r^2} \right] \quad (3.21)$$

Il principio di sovrapposizione (valido in generale per equazioni differenziali lineari alle derivate parziali) permette di estendere questo risultato ad un qualunque campo di

forze volumetrico distribuito nel mezzo infinito. Un tale campo, infatti, è sempre rappresentabile in termini di un integrale di convoluzione tra il campo di forze assegnato \mathbf{b} e la funzione di Green

$$u_k(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} b_i(\boldsymbol{\eta}) G_{ki}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad (3.22)$$

È opportuno ricordare, per completezza, che il calcolo svolto in questo paragrafo potrebbe essere facilmente generalizzato al caso di campi variabili nel tempo o al regime sinusoidale stazionario.

3.3 Il concetto di inclusione e di autodeformazione

Ogni qual volta all'interno di un mezzo è presente una disomogeneità, si può considerare il concetto di inclusione. L'inclusione è un modello matematico il cui dominio approssima il dominio della disomogeneità; essa possiede le stesse proprietà elastiche del mezzo indefinito ed è soggetta ad una deformazione anelastica $\boldsymbol{\epsilon}^*$ detta autodeformazione. L'autodeformazione è rappresentativa dell'interazione tra le proprietà elastiche del mezzo e della disomogeneità, mediante il *principio di equivalenza di Eshelby*, come riportato nel paragrafo 3.6.

L'equazione costitutiva del mezzo elastico all'interno del quale è presente un'autodeformazione, è scrivibile nella forma seguente

$$T_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (3.23)$$

dove ϵ_{kl}^* rappresenta il valore dell'autodeformazione. Tale relazione costitutiva ha un immediato significato fisico: *anche nel caso in cui lo sforzo sia nullo, si ha comunque una certa deformazione nota a priori; essa è rappresentata proprio dal tensore di deformazione ϵ_{kl}^* che è dunque, una data funzione del punto.*

Un caso tipico di effettiva presenza di un'autodeformazione descritta da un'equazione tipo la (3.23) è quello relativo alle deformazioni indotte dalle variazioni di temperatura. In questo caso specifico vale la relazione esplicita $\epsilon_{kl}^* = \frac{1}{3}\alpha\Delta T\delta_{kl}$: fisicamente, dunque, l'autodeformazione descrive il campo di deformazione associato alla dilatazione termica. Esso esiste indipendentemente dalla applicazione di sforzi e dalla

eventuale variazione locale delle proprietà elastiche. Equazioni costitutive di questo tipo generalmente non sono usate per descrivere materiali effettivamente esistenti, bensì per costruire modelli di situazioni particolari (quali, ad esempio, le strutture eterogenee). Si supponga che la deformazione anelastica ϵ_{kh}^* sia nota in tutto lo spazio e che non vi siano applicate forze di volume. In queste condizioni possiamo studiare i soli effetti della ϵ_{kh}^* . Usando le equazioni fondamentali si ha subito

$$\frac{\partial C_{ijkh}(\epsilon_{kh} - \epsilon_{kh}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.24)$$

e, quindi, ricordando le simmetrie del tensore elastico

$$C_{ijkh} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - C_{ijkh} \frac{\partial \epsilon_{kh}^*}{\partial x_i} = 0 \quad (3.25)$$

Questo significa che un'autodeformazione distribuita nello spazio corrisponde ad una forza di volume equivalente pari a

$$b_j^*(\mathbf{r}) = -C_{ijkh} \frac{\partial \epsilon_{kh}^*}{\partial x_i} \quad (3.26)$$

Utilizzando la funzione di Green, si possono descrivere gli effetti complessivi della presenza di un'autodeformazione tramite il seguente integrale:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} b_j^*(\boldsymbol{\eta}) G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} C_{sjkh} \frac{\partial \epsilon_{kh}^*(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_s} G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} C_{sjkh} \epsilon_{kh}^*(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_s} d\boldsymbol{\eta} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} C_{sjkh} \epsilon_{kh}^*(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_s} d\boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (3.27)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata usata la proprietà

$$\frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_s} = - \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_s} \quad (3.28)$$

Nel secondo passaggio è stata usata una proprietà degli integrali tripli, che discende dal teorema della divergenza (o di Gauss)

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{r} = \oint_S f n_j dS \quad (3.29)$$

applicato ad un dominio V avente frontiera S e normale esterna $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ e per un generico campo scalare f . Se poniamo f come il prodotto di due funzioni $f = \mathbf{A}\mathbf{B}$ si ottiene subito

$$\int_V \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_j} d\mathbf{r} = - \int_V \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_j} d\mathbf{r} + \oint_S \mathbf{A} \mathbf{B} n_j dS \quad (3.30)$$

La precedente uguaglianza rappresenta la formula di integrazione per parti valida per gli integrali tripli. Nel caso in cui il dominio V tenda all'intero spazio \mathcal{R}^3 e nell'ipotesi in cui il prodotto $f = \mathbf{A}\mathbf{B}$ tenda a zero all'infinito in modo sufficientemente veloce, si ottiene la relazione impiegata nell'equazione (3.27)

$$\int_{\mathcal{R}^3} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_j} d\mathbf{r} = - \int_{\mathcal{R}^3} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_j} d\mathbf{r} \quad (3.31)$$

Nei casi in cui la deformazione anelastica ϵ_{kh}^* è diversa da zero e uniforme solo in una regione chiusa e limitata: si dice che l'inclusione è omogenea. Il caso delle inclusioni omogenee è il più importante per le applicazioni ingegneristiche. Considerando allora il caso in cui nella regione chiusa e limitata V sia presente una inclusione omogenea; dall'equazione (3.27) si ottiene subito il seguente risultato:

$$u_i(\mathbf{r}) = -C_{sjkh} \epsilon_{kh}^* \int_V \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_s} (\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad (3.32)$$

avendo portato fuori dal segno di integrazione le grandezze costanti.

Si osservi che l'integrale nell'equazione (3.32) dipende solo dalla geometria dell'inclusione (cioè dal suo dominio V) e non dall'autodeformazione ϵ_{kh}^* presente al suo interno (purchè essa sia costante). Una volta fissata la forma del dominio e nota la funzione di Green è possibile, almeno in linea di principio, calcolare l'integrale e valutare gli effetti dell'inclusione in tutto lo spazio. Si noti che nell'equazione (3.32) la variabile \mathbf{r} varia in tutto lo spazio \mathcal{R}^3 mentre la variabile $\boldsymbol{\eta}$ varia solo all'interno del dominio di integrazione V .

3.4 La teoria di Eshelby per inclusioni ellissoidali

Il cuore della teoria di Eshelby riguarda lo sviluppo degli integrali riportati nell'equazione (3.32), sotto le ipotesi che il volume dell'inclusione sia di forma ellissoidale

ed il mezzo circostante sia lineare, elastico, omogeneo ed isotropo. La scelta di una forma ellittica corrisponde, con opportune condizioni di limite, a numerosi casi realistici di interesse applicativo, quando si passi a studiare le corrispondenti disomogeneità; ad esempio:

1. un ellissoide con tre semi-assi uguali corrisponde ad una sfera: questa geometria consente di studiare particelle sferiche disperse in una data matrice;
2. un ellissoide con due semi-assi uguali ed il terzo molto maggiore di essi corrisponde ad un cilindro: questa geometria definisce il caso di una fibra inserita in una matrice;
3. un ellissoide con un semi-asse molto minore degli altri due e vuoto (cioè descritto da un mezzo fittizio con $C_{ijkh} = 0$ per ogni i, j, k, h) corrisponde ad una cricca ellittica di Griffith;

Inoltre come riportato nel paragrafo 3.5 l'inclusione ellissoidale presenta inoltre, una convenienza matematica. Il problema è risolto con l'introduzione di due funzioni scalari dette potenziale armonico e potenziale biarmonico.

3.4.1 Inclusioni omogenee ellissoidali

Quando il dominio V contenente l'autodeformazione omogenea è di forma ellissoidale (figura 3.1), l'integrale nell'equazione (3.32) è calcolabile in forma chiusa:

$$V = \left\{ \mathbf{r} \in \mathcal{R}^3 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \right\} \quad (3.33)$$

Per raggiungere tale obiettivo, si moltiplichino il tensore di elasticità dato nell'equazione (3.2) per la derivata della funzione di Green data nell'equazione (3.21) (per semplificare le formule, si pone ovunque $\mathbf{z} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}$ e $z = |\mathbf{z}|$)

$$C_{sjkh} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_s} = \left[\lambda \delta_{sj} \delta_{kh} + \mu (\delta_{sk} \delta_{jh} + \delta_{sh} \delta_{jk}) \right] \times \quad (3.34)$$

$$\times \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{1}{z} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} + \frac{z_i z_j}{z^2} \right]$$

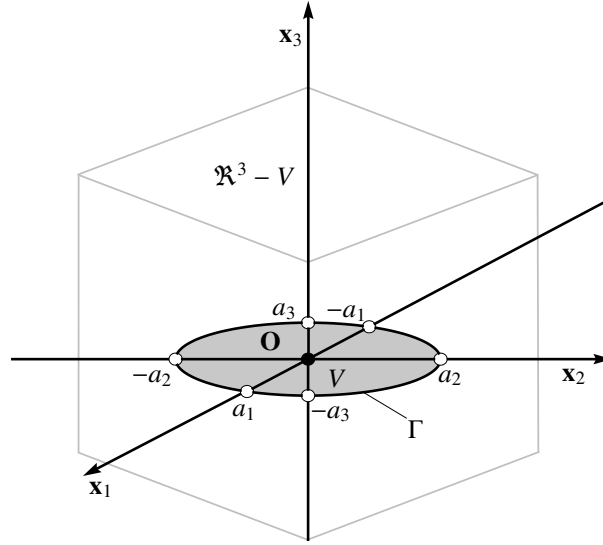


Figura 3.1: Schema di una inclusione ellissoidale

Poiché

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_s \partial x_j} = \frac{\delta_{jh}}{z} - \frac{z_i z_j}{z^3} \quad \text{cioè} \quad \frac{z_i z_j}{z^3} = \frac{\delta_{jh}}{z} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_s \partial x_j} \quad (3.35)$$

sostituendo nell'equazione (3.34)

$$\begin{aligned} C_{sjkh} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_s} &= \left[\lambda \delta_{sj} \delta_{kh} + \mu (\delta_{sk} \delta_{jh} + \delta_{sh} \delta_{jk}) \right] \times \\ &\times \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_s} \left[4(1-\nu) \frac{\delta_{ij}}{z} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_s \partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

È conveniente esprimere il risultato in funzione del modulo di taglio μ e del coefficiente di Poisson ν (per il mezzo isotropo $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$). Sviluppando l'espressione precedente

si ottiene

$$\begin{aligned}
 C_{sjkh} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_s} = & \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\delta_{kh}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{z} + \\
 & + \frac{\delta_{ih}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{z} + \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{1}{z} - \\
 & - \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\delta_{kh}}{16\pi(1-\nu)} \frac{\partial^3 z}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i} - \\
 & - \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} - \\
 & - \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Con riferimento all'equazione (3.35), ponendo $i = j$ e sommando sull'unico indice j rimasto, si ha

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{3}{z} - \frac{z_i z_j}{z^3} = \frac{3}{z} - \frac{z^2}{z^3} = \frac{2}{z} \tag{3.38}$$

Questa proprietà consente di semplificare l'equazione (3.37) in una forma importante e utile per il seguito

$$\begin{aligned}
 C_{sjkh} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_s} = & \frac{\delta_{ih}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{z} + \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{1}{z} + \\
 & + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\delta_{kh}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{z} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

L'integrale fondamentale espresso dall'equazione (3.32) è trasformato, grazie a questo risultato, nel seguente

$$\begin{aligned}
 u_i(\mathbf{r}) = & -\epsilon_{kh}^* \int_V \left[\frac{\delta_{ih}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|} + \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|} \right] d\boldsymbol{\eta} = \\
 = & -\epsilon_{kh}^* \int_V \left[\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\delta_{kh}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{\partial^3 |\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} \right] d\boldsymbol{\eta}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

A questo punto si introducono le nozioni di *potenziale biarmonico* $\Psi(\mathbf{r})$ e di *potenziale armonico* $\Phi(\mathbf{r})$ per un dominio ellissoidale V secondo le definizioni seguenti:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} \tag{3.41}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_V |\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}| d\boldsymbol{\eta} \tag{3.42}$$

Sostituendo le equazioni (3.41) e (3.42) nella (3.40), si esprime il vettore spostamento generato da una inclusione (si noti che per adesso la forma dell'inclusione è completamente arbitraria e l'ipotesi di forma ellissoidale verrà usata solo nel seguito) in modo

compatto:

$$u_i(\mathbf{r}) = \epsilon_{kh}^* \left[\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \Psi_{,ikh} - \frac{\delta_{ih}}{4\pi} \Phi_{,k} - \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \Phi_{,h} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\delta_{kh}}{4\pi} \Phi_{,i} \right] \quad (3.43)$$

Nell'equazione (3.43) è stata introdotta una comoda notazione di ampio uso nella meccanica dei solidi secondo la quale, $f_{,i}$ rappresenta la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

È importante notare che l'equazione (3.43) è valida per ogni punto dello spazio e, quindi, vale sia per i punti interni all'inclusione, sia per quelli esterni (infatti, le definizioni dei potenziali armonico e biarmonico valgono per ogni vettore \mathbf{r} appartenente ad \mathbb{R}^3 . Il vettore $\boldsymbol{\eta}$ invece, rappresenta la variabile di integrazione nelle equazioni (3.41) e (3.42) e, quindi, può assumere solo valori interni all'inclusione stessa. I potenziali armonico e biarmonico assumono espressioni analitiche differenti a seconda che vengano considerati punti interni o esterni al dominio V in esame, come discusso nel paragrafo 3.4.2

Analizzando le espressioni dei potenziali $\Psi(\mathbf{r})$ e $\Phi(\mathbf{r})$, si evince che essi dipendono esclusivamente dalla geometria dell'inclusione e non dalle sue proprietà fisiche. In particolare, il potenziale armonico è quello generato da una densità di massa uniforme (in unità arbitrarie) distribuita in un volume corrispondente alla regione V : è, dunque, evidente che esso sia univocamente determinato dalla forma ed estensione del volume occupato dalla massa.

In molte applicazioni ingegneristiche, oltre allo spostamento generato dall'inclusione è importante determinare il tensore delle deformazioni generato dall'inclusione stessa. Applicando la relazione di congruenza all'equazione (3.43) si ottiene la formula

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) &= \epsilon_{kh}^* \left[\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \Psi_{,ijkh} - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{kh} \Phi_{,ij} \right] = \\ &= -\epsilon_{kh}^* \frac{1}{8\pi} (\delta_{ih} \Phi_{,jk} + \delta_{ik} \Phi_{,jh} + \delta_{jh} \Phi_{,ik} + \delta_{jk} \Phi_{,ih}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Introducendo la definizione di *tensore di Eshelby* \mathbb{S} , in componenti S_{ijkh} , avente la seguente espressione:

$$\begin{aligned} S_{ijkh}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \Psi_{,ijkh} - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{kh} \Phi_{,ij} = \\ &= -\frac{1}{8\pi} (\delta_{ih} \Phi_{,jk} + \delta_{ik} \Phi_{,jh} + \delta_{jh} \Phi_{,ik} + \delta_{jk} \Phi_{,ih}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

L'equazione (3.45) può essere scritta in forma compatta come:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = S_{ijkh}(\mathbf{r}) \epsilon_{kh}^* \quad (3.46)$$

valida sia nei punti interni che nei punti esterni all'inclusione.

In definitiva, si può affermare che *il problema dell'inclusione è risolto quando si è in grado di determinare i potenziali armonico e biarmonico* da inserire nell'equazione (3.45). Tale calcolo può essere svolto analiticamente in modo esatto quando la forma dell'inclusione è ellissoidale. In tali ipotesi, il tensore di Eshelby risulta costante all'interno dell'inclusione (cioè non dipende da \mathbf{r}), mentre assume valori variabili al suo esterno. Per indicare sinteticamente questa proprietà di \mathbb{S} , spesso viene utilizzata la seguente convenzione:

$$S_{ijkh}(\mathbf{r}) = \begin{cases} S_{ijkh} & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ S_{ijkh}^\infty(\mathbf{r}) & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases} \quad (3.47)$$

Essa sottolinea il differente comportamento tra la zona interna e quella esterna. Conseguentemente, l'equazione (3.46) può essere scritta nella forma

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \begin{cases} S_{ijkh} \epsilon_{ij}^* & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ S_{ijkh}^\infty(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^* & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases} \quad (3.48)$$

Il tensore di Eshelby interno all'inclusione viene indicato con S_{ijkh} ed il tensore di Eshelby esterno, con $S_{ijkh}^\infty(\mathbf{r})$. Nonostante queste differenti notazioni, è opportuno sottolineare ancora una volta che le equazioni (3.45) e (3.46) sono valide per tutti i punti dello spazio.

3.4.2 Calcolo dei potenziali

In questo paragrafo vengono determinate le forme esplicite analitiche dei potenziali armonico e biarmonico introdotti nelle equazioni (3.41) e (3.42). Il calcolo di questi integrali sarà eseguito sotto l'ipotesi di un dominio ellissoidale definito come nell'equazione (3.33).

Innanzitutto, è opportuno spiegare perchè a tali integrali sono stati attribuiti i nomi di potenziale armonico e potenziale biarmonico: la ragione risiede nel fatto che essi

sono soluzioni di particolari equazioni differenziali alle derivate parziali. Per quanto riguarda il potenziale armonico, si ricordi che la funzione di Green per l'equazione di Poisson $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ è data da $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|}$ (si pensi, per esempio, al potenziale Coulombiano generato da una carica elettrica puntiforme, oppure al potenziale gravitazionale generato da una massa puntiforme). Questo significa che la più generale equazione di Poisson, $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi g(\mathbf{r})$ (con $g(\mathbf{r})$ funzione arbitraria del posto) è risolta dall'integrale di convoluzione $\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta}$. Se adesso si considera $g(\mathbf{r}) = 1$ per ogni punto interno a V e $g(\mathbf{r}) = 0$ per ogni punto esterno, si verifica immediatamente che il potenziale armonico è soluzione del seguente problema differenziale

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -4\pi & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ 0 & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases} \quad (3.49)$$

Tale relazione può essere posta in forma esplicita

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial x_3^2} = \begin{cases} -4\pi & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ 0 & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases} \quad (3.50)$$

Quindi, il primo risultato importante conferma che $\Phi(\mathbf{r})$ rappresenta il potenziale (Newtoniano o Coulombiano) generato da una densità uniforme in V e nulla all'esterno di V .

Si consideri il potenziale biarmonico $\Psi(\mathbf{r})$: a partire dall'integrale definito nell'equazione (3.42) si può calcolare il laplaciano

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) &= \nabla^2 \int_V |\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}| d\boldsymbol{\eta} = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} |\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}| d\boldsymbol{\eta} = \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i - \eta_i}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} = \int_V \frac{2}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} = 2\Phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Questo dimostra che il laplaciano del potenziale biarmonico è il doppio del potenziale armonico. Tale proprietà consente di trovare l'equazione differenziale risolta dal potenziale biarmonico. Infatti, si può calcolare il laplaciano del laplaciano di $\Psi(\mathbf{r})$ ottenendo

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = 2\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -8\pi & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ 0 & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases} \quad (3.52)$$

avendo usato le equazioni (3.49) e (3.51).

L'operatore formato con il laplaciano del laplaciano si chiama operatore biarmonico e compare molto spesso in questioni legate alla teoria dell'elasticità. Esplicitando tale operatore nell'equazione (3.52) si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \Psi(\mathbf{r})}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \Psi(\mathbf{r})}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 \Psi(\mathbf{r})}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 \Psi(\mathbf{r})}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Psi(\mathbf{r})}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 \Psi(\mathbf{r})}{\partial x_3^2 \partial x_1^2} = \\ & = \begin{cases} -8\pi & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ 0 & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases} \end{aligned} \quad (3.53)$$

In definitiva si può affermare che il potenziale biarmonico è generato anch'esso da una densità costante nel dominio V . Talvolta il nuovo operatore biarmonico viene indicato con il simbolo ∇^4 e quindi la proprietà fondamentale espressa nell'equazione (3.52) si scrive nella seguente forma compatta

$$\nabla^4 \Psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -8\pi & \text{se } \mathbf{r} \in V \\ 0 & \text{se } \mathbf{r} \notin V \end{cases} \quad (3.54)$$

A questo punto è possibile ricavare alcune forme esplicite per $\Psi(\mathbf{r})$ e $\Phi(\mathbf{r})$ particolarmente utili per le applicazioni in elasticità. Tali forme esplicite saranno ricavate utilizzando le seguenti definizioni

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a_1^2 + s} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + s} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + s} \quad (3.55)$$

$$R(s) = \sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)} \quad (3.56)$$

$$\eta(x_1, x_2, x_3) \quad \text{tale che} \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 + \eta} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \eta} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \eta} = 1 \quad (3.57)$$

dove a_1 , a_2 e a_3 sono i semi-assi dell'inclusione ellissoidale. La variabile s può assumere qualunque valore reale non negativo. Si sottolinea che nell'ultima equazione η deve essere la più grande soluzione positiva. Tramite queste tre definizioni si possono enunciare due teoremi fondamentali

Teorema 3.1 *Il potenziale armonico $\Phi(\mathbf{r})$ si può esprimere con il seguente integrale*

$$\Phi(\mathbf{r}) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{+\infty} \frac{1 - f(x_1, x_2, x_3, s)}{R(s)} ds \quad (3.58)$$

per valori interni ($\mathbf{r} \in V$) all'inclusione e dal seguente

$$\Phi(\mathbf{r}) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_{\eta}^{+\infty} \frac{1 - f(x_1, x_2, x_3, s)}{R(s)} ds \quad (3.59)$$

per valori esterni ($\mathbf{r} \notin V$) all'inclusione (si noti che la differenza tra gli integrali sta nel fatto che cambia solo un estremo di integrazione)

Il secondo teorema riguarda la derivata arbitraria del potenziale biarmonico (si noti che nella definizione del tensore di Eshelby e nella relazione che fornisce lo spostamento generato da un'inclusione arbitraria, compaiono solo derivate di ordine superiore del potenziale biarmonico quindi esse sono tutte calcolabili a partire dalla derivata prima, data dal seguente teorema).

Teorema 3.2 *La derivata del potenziale biarmonico $\Psi(\mathbf{r})$ rispetto ad x_i si può esprimere con il seguente integrale*

$$\Psi_{,i}(\mathbf{r}) = \pi a_1 a_2 a_3 x_i \int_0^{+\infty} \frac{1 - f(x_1, x_2, x_3, s)}{R(s)} \frac{s}{a_i^2 + s} ds \quad (3.60)$$

per valori interni ($\mathbf{r} \in V$) all'inclusione e dal seguente

$$\Psi_{,i}(\mathbf{r}) = \pi a_1 a_2 a_3 x_i \int_{\eta}^{+\infty} \frac{1 - f(x_1, x_2, x_3, s)}{R(s)} \frac{s}{a_i^2 + s} ds \quad (3.61)$$

per valori esterni ($\mathbf{r} \notin V$) all'inclusione (si noti ancora una volta che la differenza tra gli integrali sta nel fatto che cambia solo un estremo di integrazione)

Le espressioni fornite da tali teoremi consentono di determinare il tensore di Eshelby (o altre grandezze derivate da esso) in forma chiusa o, almeno, in una forma relativamente comoda per le applicazioni.

3.4.3 Espressione di \mathbb{S} all'interno dell'inclusione

A questo punto è possibile dimostrare una proprietà fondamentale: *il tensore di Eshelby all'interno di una inclusione omogenea ed ellissoidale è costante e, quindi, il tensore delle deformazioni generato da un'inclusione di questo tipo è costante all'interno della stessa.* La verifica di quanto affermato è banale se si considerano le espressioni dei potenziali all'interno delle inclusioni fornite dai teoremi del precedente paragrafo. Considerando l'equazione fondamentale (3.45) che fornisce il tensore di

Eshelby in ogni punto dello spazio, si ricavano di seguito le derivate dei potenziali che compaiono in tale relazione.

Dal Teorema 3.1 si può calcolare immediatamente la derivata seconda mista del potenziale armonico all'interno dell'inclusione

$$\Phi_{,ij}(\mathbf{r}) = -2\pi a_1 a_2 a_3 \delta_{ij} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(a_i^2 + s)R(s)} \quad (3.62)$$

Allo stesso modo, partendo dal Teorema 3.2, si può calcolare la derivata quarta mista del potenziale biarmonico

$$\Psi_{,ijkh}(\mathbf{r}) = -2\pi a_1 a_2 a_3 \delta_{ij} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\delta_{ij}\delta_{kh}}{(a_k^2 + s)} + \frac{\delta_{ik}\delta_{jh}}{(a_h^2 + s)} \frac{\delta_{ih}\delta_{jk}}{(a_j^2 + s)} \right] \frac{sds}{(a_i^2 + s)R(s)} \quad (3.63)$$

Le espressioni date nelle equazioni (3.62) e (3.63) sono palesemente costanti nello spazio e questo dimostra che anche il tensore di Eshelby interno è costante. L'espressione completa all'interno dell'inclusione può allora essere messa nella seguente forma che sembra assai complessa, ma che rende evidente come S_{ijkh} sia costante

$$\begin{aligned} S_{ijkh} = & \frac{a_1 a_2 a_3}{4(1-\nu)} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\delta_{ij}\delta_{kh}}{(a_k^2 + s)} + \frac{\delta_{ik}\delta_{jh}}{(a_h^2 + s)} \frac{\delta_{ih}\delta_{jk}}{(a_j^2 + s)} \right] \frac{sds}{(a_i^2 + s)R(s)} + \\ & + a_1 a_2 a_3 \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\delta_{kh}\delta_{ij}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(a_i^2 + s)R(s)} + \\ & + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} \delta_{kh}\delta_{ij} \left[\int_0^{+\infty} \frac{ds}{(a_k^2 + s)R(s)} + \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(a_h^2 + s)R(s)} \right] + \\ & + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} \delta_{jh}\delta_{ik} \left[\int_0^{+\infty} \frac{ds}{(a_i^2 + s)R(s)} + \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(a_j^2 + s)R(s)} \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Per le applicazioni pratiche è spesso utile scrivere il tensore di Eshelby nella notazione di Voigt. Esso, quindi, viene rappresentato come una matrice a sei righe e sei colonne che mette in relazione l'autodeformazione con il tensore di deformazione interno ad una data inclusione. La forma generale è la seguente

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1313} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Nella precedente relazione ciascun elemento è dato direttamente dalla forma generica riportata nell'equazione (3.64) la quale, inoltre, consente di dimostrare che è sempre verificata la seguente relazione

$$S_{1111} + S_{2222} + S_{3333} + 2S_{1212} + 2S_{2323} + 2S_{1313} = 3 \quad (3.66)$$

che scritta nella forma compatta in notazione di Voigt è:

$$Tr(\tilde{S}) = 3 \quad (3.67)$$

3.5 Un caso particolare: la sfera

Si consideri il caso particolare in cui i tre semiassi dell'ellissoide coincidano tra loro, assumendo il significato di raggio della sfera indicato con a . I due Teoremi 3.1 e 3.2 sono applicabili in modo molto semplice perchè le grandezze in gioco si semplificano notevolmente. Dall'equazione (3.55) si ottiene immediatamente

$$f(x_1, x_2, x_3, s) = \frac{x_1^2}{a^2 + s} + \frac{x_2^2}{a^2 + s} + \frac{x_3^2}{a^2 + s} = \frac{r^2}{a^2 + s} \quad (3.68)$$

dove r è il modulo del vettore posizione. Dalle equazioni (3.56) si ha

$$R(s) = \sqrt{(a^2 + s)(a^2 + s)(a^2 + s)} = (a^2 + s)^{3/2} \quad (3.69)$$

ed infine, dall'equazione (3.57), che definisce η , si ottiene

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \eta} + \frac{x_2^2}{a^2 + \eta} + \frac{x_3^2}{a^2 + \eta} = 1 \text{ ossia } \eta = r^2 - a^2 \quad (3.70)$$

Il potenziale armonico all'interno della sfera, si sviluppa tramite l'equazione (3.58) come segue

$$\Phi(\mathbf{r}) = \pi a^3 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{r^2}{a^2 + s}}{(a^2 + s)^{3/2}} ds = \pi a^3 \int_0^{+\infty} \frac{a^2 + s - r^2}{(a^2 + s)^{5/2}} ds \quad (3.71)$$

Tale integrale diventa elementare utilizzando il cambio di variabile $a^2 + s = y$ ed il risultato si trova con semplicità

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r) = 2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 \quad (3.72)$$

Allo stesso modo si calcola la derivata prima (internamente alla sfera) del potenziale biarmonico: equazione (3.60)

$$\Psi_{,i}(\mathbf{r}) = \pi a^3 x_i \int_0^{+\infty} s \frac{1 - \frac{r^2}{a^2+s}}{(a^2+s)^{5/2}} ds = \pi a^3 x_i \int_0^{+\infty} s \frac{a^2+s-r^2}{(a^2+s)^{7/2}} ds \quad (3.73)$$

Anche questo integrale diventa elementare utilizzando il cambio di variabile $a^2+s = y$ ed il risultato si trova con altrettanta semplicità del precedente

$$\Psi_{,i}(\mathbf{r}) = \Psi_{,i}(r) = \frac{4}{15} \pi x_i (5a^2 - r^2) \quad (3.74)$$

Infine, le relative derivate si trovano rapidamente

$$\Phi_{,ij} = -\frac{4}{3} \pi \delta_{ij} \quad (3.75)$$

$$\Psi_{,ijkh} = -\frac{8}{15} \pi (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{kh} \delta_{ij}) \quad (3.76)$$

dove è stata impiegata l'equazione (3.16). Queste quantità ovviamente rappresentano tensori costanti. Sostituendo le equazioni (3.75) e (3.76) nella relazione fondamentale equazione (3.45), che definisce il tensore di Eshelby, si trova il risultato esplicito valido per la sfera

$$S_{ijkh} = \frac{1}{15(1-\nu)} [(\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk})(4-5\nu) + \delta_{kh} \delta_{ij}(5\nu-1)] \quad (3.77)$$

In notazione di Voigt questo risultato assume la forma

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} \frac{7-5\nu}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{7-5\nu}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{5\nu-1}{1-\nu} & \frac{1}{15} \frac{7-5\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Osservando l'espressione esplicita di \tilde{S} si evince innanzitutto che non dipende dalla dimensione della sfera, ed è funzione solo di un parametro di elasticità, in tal caso dal coefficiente di Poisson ν .

3.6 Il principio di equivalenza di Eshelby

Come anticipato nell'introduzione, il fine ultimo della teoria di Eshelby è quello di risolvere il problema di una disomogeneità elastica, inserita in un mezzo omogeneo che occupa lo spazio intero figura 3.2.

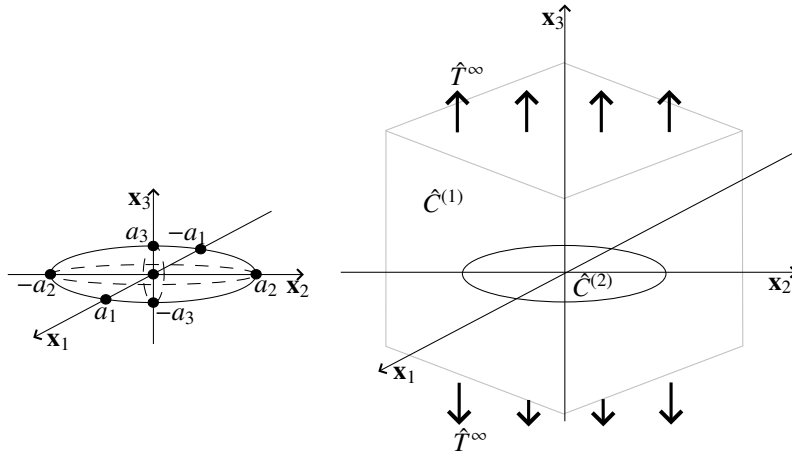


Figura 3.2: Schema di una disomogeneità ellissoidale

Più dettagliatamente, il problema concettuale si pone in questi termini: allorquando siano applicate forze all'infinito che inducono uno stato di sforzo ed uno stato di deformazioni uniformi in un mezzo omogeneo, (cioè, senza disomogeneità), si vogliono studiare le perturbazioni ai campi elastici dovute all'inserimento di una disomogeneità ellissoidale avente comportamento elastico differente da quello del mezzo Eshelby [1957, 1959]. È importante sottolineare ancora una volta la differenza tra il concetto di inclusione descritto in precedenza e quello di disomogeneità appena introdotto. Si consideri un mezzo infinito avente tensore di elasticità $C_{ijkh}^{(1)}$ e un'inclusione ellissoidale V in esso inserita e descritta localmente dalla relazione costitutiva $T_{ij} = C_{ijkh}^{(1)}(\epsilon_{kh} - \epsilon_{kh}^*)$. In tali condizioni, supponendo di conoscere i tensori di Eshelby interno ed esterno, si può determinare il tensore delle deformazioni generato dall'inclusione in ogni punto dello spazio, come riassunto nell'equazione (3.48). Lo schema generale di una inclu-

sione uniforme ellissoidale è rappresentato graficamente in figura 3.3, dove sono anche riportate le relazioni fondamentali.

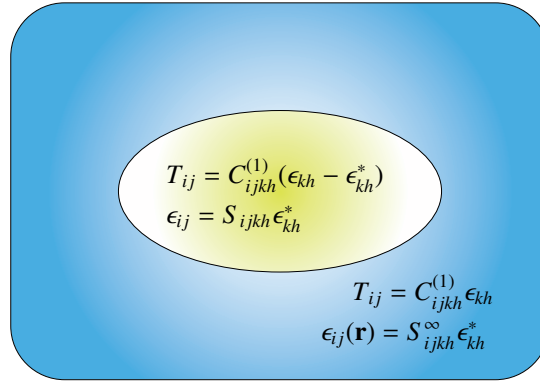


Figura 3.3: Schema di una inclusione uniforme ellissoidale

A questo punto si può introdurre la nozione di disomogeneità e, quindi, il concetto di equivalenza di Eshelby. Si supponga di avere un mezzo infinito con costanti elastiche $C_{ijkh}^{(1)}$ ovunque, tranne che in una porzione ellissoidale dove le proprietà elastiche sono descritte dal diverso tensore $C_{ijkh}^{(2)}$. Si supponga inoltre che, in assenza di forze esterne, il sistema sia in equilibrio senza alcuna deformazione o sforzo interno. A questo punto si applichi un sistema di sforzi remoti (ovvero, con sorgenti poste a distanza infinita dalla disomogeneità), in modo tale che il valore asintotico del campo di deformazione sia ϵ_{ij}^{∞} ed il corrispondente campo di sforzo sia T_{ij}^{∞} . Si assuma, inoltre, che tali tensori siano uniformi nello spazio, ovvero che le matrici che li rappresentano siano costanti. Naturalmente, queste due quantità soddisfano la relazione $T_{ij} = C_{ijkh}^{(1)} \epsilon_{kh}$ in quanto le regioni lontane non risentono degli effetti dovuti alla disomogeneità.

Il principio di equivalenza di Eshelby afferma che la situazione appena descritta può essere modellata come una sovrapposizione di due situazioni più semplici secondo lo schema di figura 3.4.

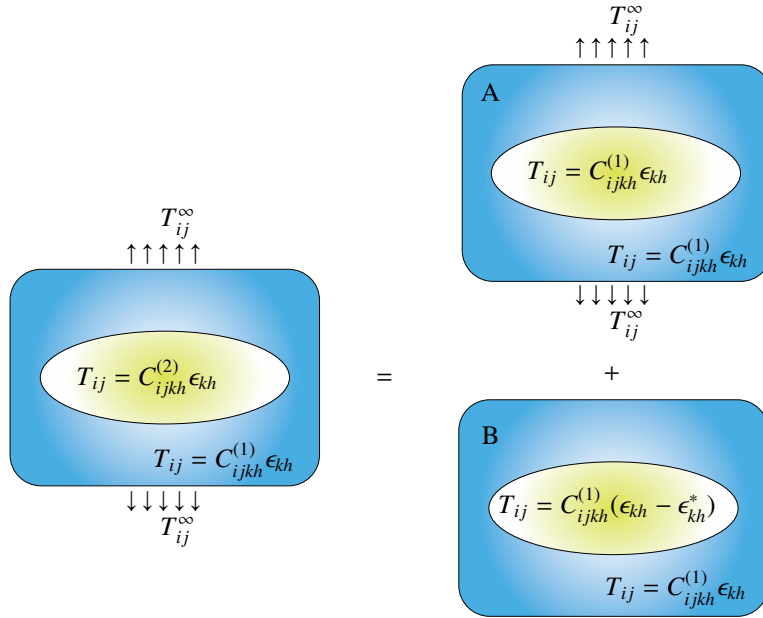


Figura 3.4: Schema di una disomogeneità ellissoidale ed illustrazione del principio di equivalenza di Eshelby

La prima situazione, indicata con *A*, è quella di un mezzo uniforme di costanti $C_{ijkh}^{(1)}$ (senza inclusioni o disomogeneità) deformato uniformemente mediante strain ϵ_{kh}^∞ e stress T_{kh}^∞ . La seconda situazione, indicata con *B*, è rappresentata da una inclusione inserita in un mezzo ovunque caratterizzato dal tensore $C_{ijkh}^{(1)}$, ma avente l'autodeformazione ϵ_{kh}^* . La situazione *B* è inoltre priva di carichi remoti. In altre parole, la situazione *B* è completamente descritta da quanto appreso finora tramite il concetto di autodeformazione e di inclusione. *Resta chiaramente incognita la grandezza ϵ_{kh}^* che deve essere trovata imponendo la totale equivalenza tra il problema di partenza e la sovrapposizione dei due problemi A + B.*

Si considerino le seguenti convenzioni per le grandezze meccaniche nei diversi problemi:

mezzo	spazio	deformazione	tensione
mezzo reale	interno	ϵ_{ij}^d	T_{ij}^d
	esterno	ϵ_{ij}^f	T_{ij}^f
modello A	interno	$\epsilon_{ij}^{A,d}$	$T_{ij}^{A,d}$
	esterno	$\epsilon_{ij}^{A,f}$	$T_{ij}^{A,f}$
modello B	interno	$\epsilon_{ij}^{B,d}$	$T_{ij}^{B,d}$
	esterno	$\epsilon_{ij}^{B,f}$	$T_{ij}^{B,f}$

È opportuno sottolineare che gli aggettivi interno ed esterno sono riferiti in ogni caso (problema reale, modello A e modello B) alla superficie limite Γ dell'ellissoide. Le notazioni introdotte saranno utili per trovare la corretta autodeformazione e descrivere analiticamente il principio di equivalenza di Eshelby. Infatti, con tali notazioni si descrivono le grandezze meccaniche nei due problemi in modo molto conveniente. Per il problema A si ha evidentemente

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ij}^{A,d} &= \epsilon_{ij}^\infty \\
 \epsilon_{ij}^{A,f} &= \epsilon_{ij}^\infty \\
 T_{ij}^{A,d} &= T_{ij}^\infty \\
 T_{ij}^{A,f} &= T_{ij}^\infty
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Per il problema B dobbiamo tenere in considerazione la teoria per le inclusioni ellissoidali che abbiamo sviluppato nei precedenti paragrafi; dunque

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ij}^{B,d} &= S_{ijkh} \epsilon_{kh}^* \\
 \epsilon_{ij}^{B,f}(\mathbf{r}) &= S_{ijkh}^\infty(\mathbf{r}) \epsilon_{kh}^* \\
 T_{ij}^{B,d} &= C_{ijkh}^{(1)} (\epsilon_{kh}^{B,d} - \epsilon_{kh}^*) \\
 T_{ij}^{B,f}(\mathbf{r}) &= C_{ijkh}^{(1)} S_{khmn}^\infty(\mathbf{r}) \epsilon_{mn}^*
 \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno del problema completo sono

dove $u^d(\mathbf{r})$ rappresenta il vettore spostamento totale interno all'inclusione e $u^f(\mathbf{r})$ rappresenta il vettore spostamento totale esterno (si ricordi che Γ è la frontiera della disomogeneità/inclusione). I due vettori spostamento devono raccordarsi con continuità

$$\begin{aligned}
u^d(\mathbf{r}) &= u^f(\mathbf{r}) & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma \\
\hat{T}^d(\mathbf{r})\mathbf{n} &= \hat{T}^f(\mathbf{r})\mathbf{n} & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma \\
T_{ij}^d(\mathbf{r}) &= C_{ijkh}^{(2)} \epsilon_{kh}^d(\mathbf{r}) & \text{in } V \\
T_{ij}^f(\mathbf{r}) &= C_{ijkh}^{(1)} \epsilon_{kh}^f(\mathbf{r}) & \text{in } \mathfrak{R}^3 - V \\
\epsilon_{ij}^f(\mathbf{r}) &\rightarrow \epsilon_{ij}^\infty & \text{se } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \\
T_{ij}^f(\mathbf{r}) &\rightarrow T_{ij}^\infty & \text{se } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

all'interfaccia Γ perchè essa è considerata per ipotesi ideale. In particolare, la seconda relazione indica che l'interfaccia trasmette in modo perfetto gli sforzi interni al mezzo. A questo punto è semplice trovare l'autodeformazione che assicura l'equivalenza all'interno del dominio V . Infatti, la sovrapposizione di sforzo e deformazione tra i problemi A e B conduce alle seguenti relazioni (che valgono sia nel formalismo tensoriale generale, sia nel contesto della notazione di Voigt; si omettono, quindi, i simboli grafici altrove adottati per distinguere le due notazioni).

$$\begin{aligned}
\epsilon^d &= \epsilon^{A,d} + \epsilon^{B,d} = \epsilon^\infty + S \epsilon^* \\
T^d &= T^{A,d} + T^{B,d} = C^{(1)} \epsilon^\infty + C^{(1)} (\epsilon^{B,d} - \epsilon^*) = \\
&= C^{(1)} \epsilon^\infty + C^{(1)} (S \epsilon^* - \epsilon^*)
\end{aligned}$$

Adesso, osservando che all'interno della disomogeneità deve essere $T^d = C^{(2)} \epsilon^d$, si ottiene la relazione fondamentale che definisce l'autodeformazione associata all'inclusione del problema B

$$\underbrace{C^{(1)} \epsilon^\infty + C^{(1)} (S \epsilon^* - \epsilon^*)}_{T^d} = C^{(2)} \underbrace{(\epsilon^\infty - \epsilon^*)}_{\epsilon^d} \quad (3.80)$$

da cui

$$C^{(1)} \epsilon^\infty + C^{(1)} S \epsilon^* - C^{(1)} \epsilon^* = C^{(2)} \epsilon^\infty + C^{(2)} S \epsilon^* \quad (3.81)$$

Allora

$$(C^{(2)} - C^{(1)}) \epsilon^\infty = [(C^{(2)} - C^{(1)}) S + C^{(1)}] \epsilon^* \quad (3.82)$$

da cui, invertendo il tensore in parentesi quadra, si ottiene

$$\epsilon^* = -[(C^{(2)} - C^{(1)}) S + C^{(1)}]^{-1} (C^{(2)} - C^{(1)}) \epsilon^\infty \quad (3.83)$$

Questo risultato può essere posto in una forma più comoda (nonchè più compatta) per le applicazioni

$$\begin{aligned}
 \epsilon^* &= - \left[(C^{(2)} - C^{(1)}) S + C^{(1)} \right]^{-1} \left[(C^{(2)} - C^{(1)})^{-1} \right]^{-1} \epsilon^\infty = \\
 &= - \left[(C^{(2)} - C^{(1)})^{-1} (C^{(2)} - C^{(1)}) S + (C^{(2)} - C^{(1)})^{-1} C^{(1)} \right]^{-1} \epsilon^\infty = \\
 &= - \left[S + (C^{(2)} - C^{(1)})^{-1} \left((C^{(1)})^{-1} \right)^{-1} \right]^{-1} \epsilon^\infty = \\
 &= - \left[S + \left((C^{(1)})^{-1} C^{(2)} - I \right)^{-1} \right]^{-1} \epsilon^\infty = \\
 &= \left[\left(I + (C^{(1)})^{-1} C^{(2)} \right)^{-1} - S \right]^{-1} \epsilon^\infty =
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Dalle relazioni precedenti combinate con la (3.80), si ottiene una relazione utile per calcolare la deformazione ϵ^d :

$$C^{(2)} \epsilon^d = C^{(1)} (\epsilon^d - \epsilon^*) \tag{3.85}$$

da cui

$$\epsilon^d = \left(I - (C^{(1)})^{-1} C^{(2)} \right)^{-1} \epsilon^* \tag{3.86}$$

Infine, sostituendo l'equazione (3.84) nell'equazione (3.86), si ha ancora

$$\epsilon^d = \left[I - S \left(I - (C^{(1)})^{-1} C^{(2)} \right) \right]^{-1} \epsilon^\infty \tag{3.87}$$

Questo risultato conduce immediatamente ad un'espressione per lo sforzo totale T^d

$$T^d = C^{(2)} \left[I - S \left(I - (C^{(1)})^{-1} C^{(2)} \right) \right]^{-1} \epsilon^\infty \tag{3.88}$$

che, dunque, risolve in modo completo il problema interno.

Per quanto concerne il problema esterno, si consideri ancora la sovrapposizione tra i due sotto problemi *A* e *B*

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ij}^f(\mathbf{r}) &= \epsilon_{ij}^{A,f}(\mathbf{r}) + \epsilon_{ij}^{B,f}(\mathbf{r}) = \epsilon^\infty + S_{ijkh}^\infty(\mathbf{r}) \epsilon_{kh}^* \\
 T_{ij}^f(\mathbf{r}) &= T_{ij}^{A,f}(\mathbf{r}) + T_{ij}^{B,f}(\mathbf{r}) = C_{ijkh}^{(1)} [\epsilon_{kh}^\infty + S_{khmn}^\infty(\mathbf{r}) \epsilon_{mn}^*]
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Questo conclude l'analisi perchè l'autodeformazione che compare nelle precedenti è data dall'equazione (3.84).

Capitolo 4

Struttura irriducibile, simmetria e media del tensore di Eshelby

4.1 Elementi del Tensore di Eshelby e decomposizione irriducibile

Il campo di deformazione perturbato $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ in un mezzo elastico, infinito e omogeneo, indotto da un'autodeformazione $\varepsilon^*(\mathbf{x})$, può essere espresso come funzione lineare di ε^* secondo la relazione

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = -\frac{C_{mnkl}}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{kl}^*(\mathbf{y}) \left[G_{im,nj}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + G_{jm,ni}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] d\mathbf{y} \quad (4.1)$$

dove $C_{ijkl} (= C_{jikl} = C_{klij})$ è il tensore delle costanti elastiche, e $G_{ij} (= G_{ji})$ sono le funzioni di Green. Le componenti dei tensori, sono riferite ad un sistema di coordinate cartesiane, inoltre è applicata la convenzione di Einstein relativa alla ripetizione degli indici, $(\cdot)_{,i}$ indica la derivata parziale $\partial(\cdot)/\partial y_i$. Di particolare interesse è il problema

di Eshelby in cui ε^* è uniforme all'interno di un dominio Ω e nulla all'esterno di Ω , cioè $\varepsilon^*(\mathbf{x}) = \varepsilon^0 \chi^\Omega(\mathbf{x})$ per un certo tipo del tensore di deformazione ε^0 , dove $\chi^\Omega(\mathbf{x})$ è la funzione caratteristica di Ω

$$\chi^\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

In questo caso è possibile riscrivere l'equazione (4.1) nella forma $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = S_{ijkl}^\Omega(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^0$, caratterizzata dal tensore di Eshelby

$$S_{ijkl}(\mathbf{x}) = -\frac{C_{mnkl}}{2} \int_{\Omega} [G_{im,nj}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + G_{jm,ni}(\mathbf{y} - \mathbf{x})] d\mathbf{y} \quad (4.3)$$

Dato il tensore di elasticità

$$C_{jkmn} = \lambda \delta_{jk} \delta_{mn} + \mu (\delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km}) \quad (4.4)$$

e sostituendolo nell'equazione (4.3), si ha

$$\mathbb{S}^\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (4.5)$$

dove

$$\Gamma_{ijkl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \left[\lambda (G_{im,mj} + G_{jm,mi}) \delta_{kl} + \mu (G_{ik,jl} + G_{il,jk} + G_{jk,il} + G_{jl,ik}) \right] \quad (4.6)$$

con δ_{kl} delta di Kronecker, μ modulo di taglio e λ costante di Lamé associata con μ ed il coefficiente di Poisson ν , nella forma $\lambda = 2\mu\nu/(1 - 2\nu)$. Le funzioni di Green sono

$$G_{ij}(\mathbf{z}) = \frac{1}{8\pi\mu(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \delta_{ij} \ln \frac{1}{|\mathbf{z}|} + \frac{z_i z_j}{|\mathbf{z}|^2} \right] \quad (4.7)$$

in $2D$, e

$$G_{ij}(\mathbf{z}) = \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{z}|} + \frac{z_i z_j}{|\mathbf{z}|^3} \right] \quad (4.8)$$

in $3D$, dove $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ e $|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i}$

Un tensore $D_{i_1 \dots i_n}$ di ordine $n \geq 2$ è detto deviatorico, se le sue componenti sono completamente simmetriche e con traccia nulla

$$D_{i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_n} = D_{i_1 \dots i_s \dots i_r \dots i_n}, \quad \delta_{i_r i_s} D_{i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_n} = 0 \quad (\forall 1 \leq r \leq s \leq n) \quad (4.9)$$

Maggiori dettagli sono riportati in Zheng e Zou [2000]; Zou *e altri* [2001].

La decomposizione irriducibile di \mathbb{S}^Ω prende la forma riportata in Zou *e altri* [2001]

$$\mathbb{S}^\Omega = \mathbb{S} + \mathbb{A}^\Omega \quad (4.10)$$

con

$$S_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.11)$$

e

$$A_{ijkl}^\Omega = \eta (\delta_{ik} \epsilon_{jl} + \delta_{il} \epsilon_{jk} + \epsilon_{ik} \delta_{jl} + \epsilon_{il} \delta_{jk}) + \delta_{ij} d_{kl}^{(1)} + \delta_{kl} d_{ij}^{(2)} + D_{ijkl}^\Omega \quad (4.12)$$

in due dimensioni, e

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^\Omega &= h_s (\delta_{ki} \epsilon_{jls} + \delta_{kj} \epsilon_{ils} + \delta_{li} \epsilon_{jks} + \delta_{lj} \epsilon_{iks}) \\ &+ (\epsilon_{sik} H_{ljs} + \epsilon_{sil} H_{kjs} + \epsilon_{sik} H_{ljs} + \epsilon_{sjl} H_{kis}) \\ &+ \delta_{ij} d_{kl}^{(1)} + \delta_{kl} d_{ij}^{(2)} + (\delta_{ik} d_{lj}^{(3)} + \delta_{il} d_{kj}^{(3)} + \delta_{jk} d_{li}^{(3)}) + D_{ijkl}^\Omega \end{aligned} \quad (4.13)$$

in tre dimensioni. Nella precedente decomposizione, \mathbf{h} è un vettore, ϵ è il tensore di permutazione, \mathbf{d} , \mathbf{H} e \mathbb{D} sono tensori deviatorici, rispettivamente del secondo, terzo e quart'ordine. Un tensore del second'ordine \mathbf{Q} è detto ortogonale se la sua inversa \mathbf{Q}^{-1} esiste ed è uguale alla sua trasposta \mathbf{Q}^T . Le rotazioni rigide, chiamate tensori rotazionali, hanno una corrispondenza biunivoca con i tensori ortogonali ed hanno determinante pari a 1. Un tensore \mathbf{Q} è detto essere una trasformazione simmetrica di un tensore \mathbf{T} di ordine n , se \mathbf{T} è invariante sotto \mathbf{Q} , cioè

$$\mathbf{Q}^{\times n} \mathbf{T} = \mathbf{T} \text{ oppure } Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} \dots Q_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n} = T_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (4.14)$$

L'insieme delle trasformazioni simmetriche di \mathbf{T} , forma un sottogruppo del gruppo completo dei tensori ortogonali, chiamato gruppo di simmetria di \mathbf{T} . Se il gruppo simmetrico di \mathbf{T} è uguale al gruppo dei tensori ortogonali, \mathbf{T} è detto essere isotropo;

altrimenti è detto anisotropo. Una speciale anisotropia è la emitropia che corrisponde al gruppo dei tensori di rotazione. Ad esempio, il delta di Kronecker δ_{ij} è isotropo, il tensore di permutazione in due dimensioni ϵ_{ij} ed in tre dimensioni ϵ_{ijk} è emitropico e ogni tensore isotropo è la combinazione lineare di prodotti tensoriali dei delta di Kronecker. Così, dall'equazione (4.11) all'equazione (4.13) si evince che \mathbb{S} è isotropo, il primo termine sul lato destro (4.12) è emitropico, \mathbb{A}^Ω è anisotropo, e \mathbb{S} è la parte isotropa di \mathbb{S}^0 nel senso che è perpendicolare a \mathbb{A}^Ω e quindi il prodotto $S_{ijkl}A_{ijkl}^\Omega = 0$.

Di seguito si riportano alcune proprietà dei tensori deviatorici $2D$. Siano \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 due versori ortogonali, indicando con $i = \sqrt{-1}$ l'unità immaginaria, si introduca il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$. Per ogni intero $n \geq 2$, il tensore complesso di ordine n

$$\mathbf{w}^{\times n} \text{ oppure } w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n} \quad (4.15)$$

è completamente simmetrico. Poiché il semplice fatto che $w_i w_i = 0$, $\mathbf{w}^{\times n}$ è anche senza traccia, cioè con traccia nulla. Tuttavia $\mathbf{w}^{\times n}$ e conseguentemente, la sua parte reale \mathbf{P}_n e quella immaginaria \mathbf{Q}_n sono deviatorici. In seguito saranno particolarmente utili le due proprietà fondamentali, seguenti Zheng [1993]; Zheng e Zou [2000]:

1. Qualsiasi tensore deviatorico bidimensionale \mathbf{B} , può essere espresso come una combinazione lineare di \mathbf{P}_n e \mathbf{Q}_n

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{P}_n + B_2 \mathbf{Q}_n \quad (4.16)$$

dove B_1 e B_2 rappresentano le componenti indipendenti di \mathbf{B} ;

2. Dopo una rotazione rigida \mathbf{R} di un angolo θ , si hanno le seguenti proprietà di trasformazione

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\rightarrow \mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cos\theta - \mathbf{e}_2 \sin\theta \\ \mathbf{e}_2 &\rightarrow \mathbf{R}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \sin\theta + \mathbf{e}_2 \cos\theta \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n &\rightarrow \mathbf{R}^{\times n} \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n \cos n\theta - \mathbf{Q}_n \sin n\theta \\ \mathbf{Q}_n &\rightarrow \mathbf{R}^{\times n} \mathbf{Q}_n = \mathbf{P}_n \sin n\theta + \mathbf{Q}_n \cos n\theta \end{aligned} \quad (4.18)$$

Così, la rappresentazione irriducibile (4.10)-(4.12) per il caso $2D$, contiene 9 parametri indicati con α, β, η e due in ognuno di $\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \mathbb{D}^\Omega$. In tre dimensioni, è noto che il generico tensore deviatorico di ordine n ha $(2n + 1)$ componenti indipendenti. Pertanto, nel caso tridimensionale la rappresentazione irriducibile (4.10), (4.11) e (4.13) di \mathbb{S} contiene 36 parametri. Un semplice ma generale ed importante proprietà è che il tensore deviatorico non nullo è non isotropo e nemmeno emitropico.

4.2 Struttura irriducibile nel caso bidimensionale

Applicando l'equazione (4.10) alla (4.12) si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} S_{ijkk}^\Omega &= 2(\alpha + \beta)\delta_{ij} + 2d_{ij}^{(2)} \\ S_{kkij}^\Omega &= 2(\alpha + \beta)\delta_{ij} + 2d_{ij}^{(1)} \\ S_{ikjk}^\Omega &= (\alpha + 3\beta)\delta_{ij} + 4\eta\epsilon_{ij} + d_{ij}^{(1)} + d_{ij}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

e le relazioni conseguenti

$$S_{iikk}^\Omega = 4(\alpha + \beta), \quad S_{ikik}^\Omega = 2(\alpha + 3\beta), \quad \epsilon_{ij}S_{ikjk}^\Omega = 8\eta \quad (4.20)$$

Dall'equazione (4.6) si ottiene

$$\begin{aligned} S_{ijkk}^\Omega &= -(\lambda + \mu) \int_{\Omega} (G_{ik,jk} + G_{jk,ik}) d\mathbf{y}, \\ S_{kkij}^\Omega &= - \int_{\Omega} [\lambda G_{kl,kl} \delta_{ij} + \mu(G_{ik,jk} + G_{jk,ik})] d\mathbf{y}, \\ S_{ikjk}^\Omega &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda + \mu)(G_{ik,jk} + G_{jk,ik}) + \mu(G_{ij,kk} + G_{kk,ij})] d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Osservando che $S_{ikjk}^\Omega = S_{jkik}^\Omega$ dalla terza delle equazioni (4.21), insieme con la proprietà base $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, conduce immediatamente al risultato generale $\eta \equiv 0$ in tutto il mezzo, valido per un arbitrario Ω . Dall'equazione (4.7) si ha

$$G_{ik,k} = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu(1-\nu)} \left(\ln \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \right)_{,i}, \quad G_{kk,i} = \frac{3-4\nu}{4\pi\mu(1-\nu)} \left(\ln \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \right)_{,i} \quad (4.22)$$

Sostituendo l'equazione (4.22) nell'equazione (4.21), si ha

$$S_{iikk}^\Omega = 2\chi_{kk}^\Omega, \quad S_{ijkk}^\Omega = \frac{1}{1-\nu}\chi_{kk}^\Omega, \quad S_{kkij}^\Omega = \frac{\nu}{1-\nu}\chi_{kk}^\Omega\delta_{ij} + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\chi_{ij}^\Omega \quad (4.23)$$

con

$$\chi_{ij}^{\Omega}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\ln \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \right)_{,ij} d\mathbf{y} \quad (4.24)$$

La quantità $\ln \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}$ è armonica, cioè $\left(\ln \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \right)_{,kk} = 0$ per qualsiasi punto $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, e $\chi_{kk}^{\Omega}(\mathbf{x})$ si annulla fuori da Ω . Se \mathbf{x} è un punto interno ad Ω , in un intorno circolare Ω_{ε} centrato su \mathbf{x} , con raggio $\varepsilon > 0$, può essere scelto Ω_{ε} dentro Ω . Usando il teorema di Gauss, si ha

$$\chi_{kk}^{\Omega}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \left(\ln \frac{1}{|\mathbf{z}|} \right)_{,k} \frac{z_k}{|\mathbf{z}|} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{1}{|\mathbf{z}|} d\Gamma = 1 \quad (4.25)$$

dove $\frac{1}{|\mathbf{z}|}$ è il versore normale uscente dalla frontiera $\partial\Omega_{\varepsilon}$, e $d\Gamma$ indica l'elemento di frontiera. Inoltre $\chi_{kk}^{\Omega}(\mathbf{x})$ è uguale alla funzione caratteristica di Ω : $\chi_{kk}^{\Omega}(\mathbf{x}) = \chi^{\Omega}(\mathbf{x})$. Conseguentemente, dalle equazioni (4.23) e (4.20) si ha

$$S_{ikik}^{\Omega} = 2\chi^{\Omega}, \quad S_{iikk}^{\Omega} = \frac{1}{1-\nu}\chi^{\Omega} \quad (4.26)$$

$$\alpha = \frac{4\nu-1}{8(1-\nu)}\chi^{\Omega}, \quad \beta = \frac{3-4\nu}{8(1-\nu)}\chi^{\Omega} \quad (4.27)$$

Si considerino le derivate dei tensori del secondo ordine. Per ogni tensore \mathbf{T} indichiamo la parte deviatorica con $[\mathbf{T}]$. Introducendo il tensore derivata, indipendente dal materiale, $\mathbf{d}^{\Omega}(\mathbf{x}) = [\chi^{\Omega}(\mathbf{x})]$, oppure

$$d_{ij}^{\Omega}(\mathbf{x}) = \chi_{ij}^{\Omega}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\chi^{\Omega}\delta_{ij} \quad (4.28)$$

Dalle equazioni (4.19) e dalle equazioni (4.23), si ottiene immediatamente la seguente rappresentazione

$$d_{ij}^{(1)} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}d_{ij}^{\Omega}, \quad d_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2(1-\nu)}d_{ij}^{\Omega} \quad (4.29)$$

Quindi solo uno tra $d_{ij}^{(1)}$ e $d_{ij}^{(2)}$ è indipendente.

Infine, utilizzando la proprietà che la parte di deviatorica di ogni tensore contenente un δ di Kronecker si annulla e sostituendo nella (4.12) \mathbb{D}^{Ω} con $\mathbb{D}^{\Omega}/(1-\nu)$, si ha l'espressione alternativa, indipendente dal materiale

$$\mathbb{D}^{\Omega} = [\Xi^{\Omega}] = [\Theta^{\Omega}] \quad (4.30)$$

dove

$$\Xi_{ijkl}^{\Omega}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} z_i \left(\ln \frac{1}{|\mathbf{z}|} \right)_{,ijkl} d\mathbf{y} \quad (4.31)$$

$$\Theta_{ijkl}^{\Omega}(\mathbf{x}) = -\frac{2}{\pi} \int_{\Omega} \frac{z_i z_j z_k z_l}{|\mathbf{z}|^6} d\mathbf{y} \quad (4.32)$$

A questo punto è possibile enunciare il seguente teorema

La parte isotropa \mathbb{S} del tensore di Eshelby \mathbb{S}^{Ω} per un arbitrario dominio bidimensionale elastico ed isotropo Ω , si annulla nei punti esterni ad Ω ed è uniforme nei punti interni a Ω con lo stesso valore del tensore di Eshelby per un dominio circolare \mathbb{S}^0 , e cioè

$$\mathbb{S}(\mathbf{x}) = \mathbb{S}^0 \chi^{\Omega}(\mathbf{x}) \quad (4.33)$$

con

$$S_{ijkl}^0 = \frac{4\nu - 1}{8(1 - \nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{3 - 4\nu}{8(1 - \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.34)$$

e la parte anisotropa $\mathbb{A}^{\Omega} = \mathbb{S}^{\Omega} - \mathbb{S}$ è completamente caratterizzata dai tensori deviatorici indipendenti dal materiale \mathbf{d}^{Ω} e \mathbf{D}^{Ω} nella forma

$$A_{ijkl}^{\Omega} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \delta_{ij} d_{kl}^{\Omega}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2(1 - \nu)} (\delta_{ik} d_{jl}^{\Omega}(\mathbf{x}) + \delta_{il} d_{jk}^{\Omega}(\mathbf{x})) + \frac{1}{1 - \nu} D_{ijkl}^{\Omega}(\mathbf{x}) \quad (4.35)$$

e quindi in generale, ha solo quattro componenti indipendenti.

Il campo di deformazione indotto in Ω da un'autodeformazione uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^0 \chi^{\Omega}$ presenta la forma $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) = -\mathbb{F}^{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^0$, con

$$\mathbb{F}^{\Omega}(\mathbf{x}) = \mathbb{C} - \mathbb{C} \mathbb{S}^{\Omega}(\mathbf{x}), \quad \text{oppure} \quad F_{ijkl}^{\Omega} = C_{ijkl} - C_{ijmn} S_{mnkl}^{\Omega} \quad (4.36)$$

detto tensore di autorigidezza, poiché ha la stessa simmetria $F_{ijkl}^{\Omega} = F_{jikl}^{\Omega} = F_{klij}^{\Omega}$ e dimensione fisica del tensore di elasticità \mathbb{C} .

Nei vari schemi della micromeccanica dei compositi di tipo inclusione - matrice, invece di \mathbb{S}^{Ω} , è \mathbb{F}^{Ω} che svolge direttamente un ruolo chiave Zheng e Du [2001]. Pertanto, vale la pena di dare la corrispondente struttura irriducibile di \mathbb{F}^{Ω} , che si può facilmente dedurre dalla (4.34) e (4.35), (4.4) come di seguito

$$\frac{1 - \nu}{2\mu} F_{ijkl}^{\Omega} = \frac{1}{8} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{2} (\delta_{ij} d_{kl}^{\Omega} + d_{ij}^{\Omega} \delta_{kl}) - D_{ijkl}^{\Omega} \quad (4.37)$$

Il tensore, \mathbb{F}^Ω , normalizzato mediante $(1 - 2\nu)/2\mu$ è indipendente dal materiale.

Infine, è opportuno evidenziare che le precedenti decomposizioni irriducibili (4.34)-(4.36), sono per un problema di deformazione piana. Per problemi di sollecitazione piana, tuttavia, i risultati corrispondenti, possono essere ottenuti immediatamente, sostituendo nelle (4.34)-(4.36), ν con $\nu/(1 + \nu)$.

4.3 Struttura irriducibile nel caso tridimensionale

La struttura irriducibile del tensore di Eshelby in tre dimensioni, può essere ottenuta con un processo simile al caso bidimensionale. Dalle equazioni (4.10), (4.11), (4.13) si hanno le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} S_{ijkk}^\Omega &= (3\alpha + 2\beta)\delta_{ij} + 3d_{ij}^{(2)} + 4d_{ij}^{(3)} \\ S_{kkij}^\Omega &= (3\alpha + 2\beta)\delta_{ij} + 3d_{ij}^{(1)} + 4d_{ij}^{(3)} \\ S_{ikjk}^\Omega &= (\alpha + 4\beta)\delta_{ij} + 5\epsilon_{ijs}h_s + d_{ij}^{(1)} + d_{ij}^{(2)} + 5d_{ij}^{(3)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

e di conseguenza le relazioni conseguenti

$$S_{iikk}^\Omega = 3(3\alpha + 2\beta), \quad S_{ikik}^\Omega = 3(\alpha + 4\beta), \quad \epsilon_{ijs}S_{ikjk}^\Omega = 10h_s \quad (4.39)$$

Dalla (4.6) si ottiene

$$\begin{aligned} S_{ijkk}^\Omega(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2}(3\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} (G_{ik,jk} + G_{jk,ik}) d\mathbf{y}, \\ S_{kkij}^\Omega(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda G_{kl,kl} \delta_{ij} + \mu(G_{ik,jk} + G_{jk,ik})] d\mathbf{y}, \\ S_{ikjk}^\Omega(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\lambda + \mu)(G_{ik,jk} + G_{jk,ik}) + \mu(G_{ij,kk} + G_{kk,ij})] d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Osservando che $S_{ikjk}^\Omega = S_{jkik}^\Omega$ dalla terza delle (4.40), e richiamando le proprietà di antisimmetria del tensore, si ha immediatamente il risultato generale $h_s \equiv 0$, per un arbitrario dominio Ω . Dalle equazioni (4.10), (4.11), (4.13), si ha poi la seguente relazione

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^\Omega \epsilon_{ikm} &= 4H_{jlm} + d_{lk}^{(1)} \epsilon_{jkm} + d_{jk}^{(2)} \epsilon_{klm} \\ &+ \frac{1}{2}(d_{kl}^{(3)} \epsilon_{kjm} - d_{kj}^{(3)} \epsilon_{klm}) + (\alpha - \beta) \epsilon_{jlm} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Così $4H_{jlm}$ è uguale alla completa simmetrizzazione di $S_{ijkl}^\Omega \epsilon_{ikm}$. Tuttavia, dall'equazione (4.6) si ha

$$-2S_{ijkl}^\Omega \epsilon_{ikm} = \int_{\Omega} [\lambda(G_{in,nj} + G_{jn,ni})\epsilon_{ilm} + \mu(G_{li,jk} + G_{jk,li})\epsilon_{ikm}] dy \quad (4.42)$$

Il primo termine a destra della (4.42) è antisimmetrico per la coppia degli indici (lm) , sicché la simmetrizzazione della coppia pari (lm) è uguale a zero; dopo aver simmetrizzato la coppia di indici (jl) , il secondo termine si annulla automaticamente. Dunque la completa simmetrizzazione di $S_{ijkl}^\Omega \epsilon_{ikm}$ si annulla. Si ottiene così il secondo risultato generale $H_{jlm} \equiv 0$, per un arbitrario dominio Ω . Dall'equazione (4.8) si ha

$$G_{ik,k} = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} \right)_{,i}, \quad G_{kk,i} = \frac{5-6\nu}{4\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} \right)_{,i} \quad (4.43)$$

Sostituendo l'equazione (4.43) nell'equazione (4.40), si ha

$$\begin{aligned} S_{ikjk}^\Omega(\mathbf{x}) &= 3\chi_{kk}^\Omega, \\ S_{ijkk}^\Omega(\mathbf{x}) &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \chi_{kk}^\Omega, \\ S_{kkij}^\Omega(\mathbf{x}) &= \frac{\nu}{1-\nu} \chi_{kk}^\Omega \delta_{ij} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \chi_{ij}^\Omega \end{aligned} \quad (4.44)$$

con

$$\chi_{ij}^\Omega(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} \right)_{,ij} dy \quad (4.45)$$

La stessa relazione $\chi_{kk}^\Omega(\mathbf{x}) = \chi^\Omega(\mathbf{x})$ come quella in due dimensioni può essere facilmente provata osservando la struttura armonica $\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} \right)_{kk} = 0$ per qualsiasi punto $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Così dall'equazione (4.39) e dall'equazione (4.44) si ottiene

$$S_{ikik}^\Omega = 3\chi^\Omega, \quad S_{iikk}^\Omega = \frac{1+\nu}{1-\nu} \chi^\Omega \quad (4.46)$$

$$\alpha = \frac{5\nu-1}{15(1-\nu)} \chi^\Omega, \quad \beta = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)} \chi^\Omega \quad (4.47)$$

Indicando con $\mathbf{d}^\Omega(\mathbf{x})$ la parte deviatorica di $\chi^\Omega(\mathbf{x})$

$$d_{ij}^\Omega(\mathbf{x}) = \chi_{ij}^\Omega(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} \chi^\Omega \delta_{ij} \quad (4.48)$$

Dalle equazioni (4.19) e dalle equazioni (4.23), si ha immediatamente la seguente rappresentazione

$$d_{ij}^{(1)} = -\frac{6\nu-7}{7(1-\nu)} d_{ij}^\Omega, \quad d_{ij}^{(2)} = -\frac{13\nu-7}{7(1-\nu)} d_{ij}^\Omega, \quad d_{ij}^{(3)} = -\frac{8\nu-7}{7(1-\nu)} d_{ij}^\Omega \quad (4.49)$$

Ancora, solo uno tra $d_{ij}^{(1)}$, $d_{ij}^{(2)}$ e $d_{ij}^{(3)}$ è indipendente.

Sostituendo nella (4.13) \mathbb{D}^Ω con $\mathbb{D}^\Omega/(1-\nu)$, si ha l'espressione alternativa indipendente dal materiale:

$$\mathbb{D}^\Omega = [\Xi^\Omega] = [\Theta^\Omega] \quad (4.50)$$

dove

$$\Xi_{ijkl}^\Omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} z_i \left(\frac{1}{|\mathbf{z}|} \right)_{,jkl} d\mathbf{y} \quad (4.51)$$

$$\Theta_{ijkl}^\Omega(\mathbf{x}) = -\frac{15}{8\pi} \int_{\Omega} \frac{z_i z_j z_k z_l}{|\mathbf{z}|^7} d\mathbf{y} \quad (4.52)$$

A questo punto è possibile enunciare il seguente teorema

La parte isotropa \mathbb{S} del tensore di Eshelby \mathbb{S}^Ω per un arbitrario dominio $3D$ elastico ed isotropo Ω , si annulla nei punti esterni ad Ω ed è uniforme nei punti interni a Ω con lo stesso valore del tensore di Eshelby per un dominio circolare \mathbb{S}^0 , e cioè

$$\mathbb{S}(\mathbf{x}) = \mathbb{S}^0 \chi^\Omega(\mathbf{x}) \quad (4.53)$$

con

$$\mathbb{S}_{ijkl}^0 = \frac{5\nu-1}{15(1-\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.54)$$

e la parte anisotropa $\mathbb{A}^\Omega = \mathbb{S}^\Omega - \mathbb{S}$ è completamente caratterizzata dai tensori deviatorici indipendenti dal materiale \mathbf{d}^Ω e \mathbb{D}^Ω nella forma

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^\Omega = & -\frac{7-6\nu}{7(1-\nu)} \delta_{ij} d_{kl}^\Omega - \frac{7-13\nu}{7(1-\nu)} \delta_{kl} d_{ij}^\Omega \\ & + \frac{7-8\nu}{7(1-\nu)} (\delta_{ik} d_{lj}^\Omega + \delta_{il} d_{kj}^\Omega + \delta_{jk} d_{li}^\Omega + \delta_{jl} d_{ki}^\Omega) + \frac{1}{1-\nu} D_{ijkl}^\Omega \end{aligned} \quad (4.55)$$

e quindi in generale, ha solo 14 componenti indipendenti.

Dai risultati precedenti, non è difficile ottenere il tensore di autorigidezza

$$\mathbb{F}^\Omega = \mathbb{C} - \mathbb{C} \mathbb{S}^\Omega$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{2\mu} F_{ijkl}^\Omega = & \frac{1+5\nu}{15} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{7-5\nu}{30} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \left(1 - \frac{13\nu}{7}\right) (\delta_{ij} d_{kl}^\Omega + d_{ij}^\Omega \delta_{kl}) \\ & - \left(1 - \frac{8\nu}{7}\right) (\delta_{ik} d_{lj}^\Omega + \delta_{il} d_{kj}^\Omega + \delta_{jk} d_{li}^\Omega + \delta_{jl} d_{ki}^\Omega) - D_{ijkl}^\Omega \end{aligned} \quad (4.56)$$

4.4 Simmetria del Tensore di Eshelby

Sia 0 il centro di gravità di Ω e sia $\{x_i\}$ un sistema di coordinate cartesiane con origine in 0 . Un tensore ortogonale \mathbf{Q} è detto essere una trasformazione simmetrica di Ω , se Ω è invariante sotto \mathbf{Q} : $\mathbf{Q}\Omega = \Omega$, ossia

$$Q_{ij}x_j \in \Omega \quad \text{se e solo se} \quad x_i \in \Omega \quad (4.57)$$

Il gruppo di simmetria di Ω è definito come un set di tutte le trasformazioni simmetriche di Ω ed è indicato con G^Ω . Il sottogruppo g^Ω costituito da tutti tensori rotazione in G^Ω è detto gruppo di simmetria rotazionale di Ω .

Dall'equazione (4.7) è noto che $G_{ij}(\mathbf{z})$ è un tensore anisotropo del secondo ordine, valutato in funzione della variabile vettoriale \mathbf{z} , cioè, la seguente forma invariante

$$\mathbf{Q}^{\times 2} \mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{z}) \quad \text{oppure} \quad Q_{im}Q_{jn}Q_{mk}(z_k) = G_{ij}(Q_{kr}z_r) \quad (4.58)$$

è valida per qualsiasi tensore ortogonale \mathbf{Q} . Poiché la derivazione è un'operatore isotropo, la $\Gamma(\mathbf{z})$ definita nell'equazione (4.5) è una funzione tensoriale isotropa del quarto ordine di \mathbf{z} , cioè, ha la seguente forma invariante

$$\mathbf{Q}^{\times 4} \Gamma(\mathbf{z}) = \Gamma(\mathbf{Q}\mathbf{z}) \quad \text{oppure} \quad Q_{im}Q_{jn}Q_{kr}Q_{ls}\Gamma_{mnr}(z_u) = \Gamma_{ijkl}(Q_{uv}z_v) \quad (4.59)$$

valida per qualsiasi tensore ortogonale \mathbf{Q} . Così per qualsiasi operatore ortogonale \mathbf{Q} , si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^\Omega(\mathbf{Q}\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{y} - \mathbf{Q}\mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \mathbf{y} - \mathbf{Q}\mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbf{Q}^T\Omega} \mathbf{Q}^{\times 4} \Gamma(\mathbf{y}' - \mathbf{x})(\det \mathbf{Q}) d\mathbf{y}' \end{aligned} \quad (4.60)$$

dove $\mathbf{y}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}$ oppure $y'_i = Q_{ji}y_j$ corrisponde ad una trasformazione di coordinate ortogonali. In particolare, per ogni $\mathbf{R} \in g^\Omega$, essendo $\mathbf{R}^T \Omega = \Omega$ e $\det \mathbf{R} = 1$, dall'equazione (4.60), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^\Omega(\mathbf{R}\mathbf{x}) &= \mathbf{R}^{\times 4} \mathbb{S}^\Omega(\mathbf{x}) \quad \text{oppure} \\ S_{ijkl}^\Omega(R_{uv}x_v) &= R_{im}R_{jn}R_{kr}R_{ls}S_{mnr}^\Omega(x_u) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ciò significa che qualsiasi trasformazione simmetrica rotazionale di Ω è una trasformazione simmetria della funzione tensoriale del quarto ordine $\mathbb{S}^\Omega(\mathbf{x})$.

Di particolare interesse è il tensore del quarto ordine $\mathbb{S}^\Omega(0)$. In questo caso, dall'equazione (4.61), si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\times 4} \mathbb{S}^\Omega(0) &= \mathbb{S}^\Omega(0) \quad \text{oppure} \\ R_{im} R_{jn} Q_{kr} Q_{ls} S_{mnr s}^\Omega(0) &= S_{ijkl}^\Omega(0) \quad \forall \mathbf{R} \in g^\Omega \end{aligned} \quad (4.62)$$

cioè $\mathbb{S}^\Omega(0)$ è g -invariante. Questo è equivalente alla seguente

$$\mathbf{R}^{\times 2} \mathbf{d}^\Omega(0) = \mathbf{d}^\Omega(0) \quad \text{e} \quad \mathbf{R}^{\times 4} \mathbb{D}^\Omega(0) = \mathbb{D}^\Omega(0) \quad \forall \mathbf{R} \in g^\Omega \quad (4.63)$$

a causa della ortogonalità delle decomposizioni irriducibili Zou e altri [2001]. Non ci sono restrizioni sul fatto che 0 sia un punto interno di Ω , oppure no.

Nel caso bidimensionale, dall'equazione (4.18), si evince che $\mathbf{d}^\Omega(0)$ oppure $\mathbb{D}^\Omega(0)$, saranno invarianti sotto una rotazione, se e solo se, l'angolo di rotazione è multiplo rispettivamente di π o $\pi/2$. Dunque, per ogni dominio simmetrico Ω , $\mathcal{C}_n(n \geq 3, n \neq 4)$, $\mathbf{d}^\Omega(0)$ e $\mathbb{D}^\Omega(0)$ si annullano. Questo diventa

$$\mathbb{S}^\Omega(0) = \mathbb{S}^0 \chi^\Omega(0) \quad (4.64)$$

per ogni dominio simmetrico Ω , $\mathcal{C}_n(n \geq 3, n \neq 4)$, senza alcuna restrizione su Ω . Risultati simili all'equazione (4.64), ma con varie restrizioni, sono stati ottenuti da Nozaki e Taya [1997]; Kawashita e Nozaki [2001]; Franciosi [2005], per lo più basati sulle loro rispettive soluzioni del tensore di Eshelby \mathbb{S}^Ω . Poiché ogni tensore deviatorico del quarto ordine è \mathcal{C}_4 invariante, mentre un eventuale tensore del secondo ordine non lo è, si vede che $\mathbb{S}^\Omega(0)$, ha la seguente rappresentazione generale

$$\mathbb{S}^\Omega(0) = \mathbb{S}^0 \chi^\Omega(0) + \frac{1}{1-\nu} \mathbb{D}^\Omega(0) \quad (4.65)$$

per ogni Ω \mathcal{C}_4 -simmetrico. In tre dimensioni, se Ω è \mathcal{C}_n -simmetrico con ($n \neq 5$) rispetto ad una direzione \mathbf{a} , si ha

$$\mathbf{d}^\Omega(0) = \eta_1 [\mathbf{a}^{\times 2}], \quad \mathbb{D}^\Omega(0) = \eta_2 [\mathbf{a}^{\times 4}], \quad (4.66)$$

Il corrispondente $\mathbb{S}^\Omega(0)$ ha isotropia trasversale D_{coh} con asse privilegiato \mathbf{a} , cioè $\mathbb{S}^\Omega(0)$ è invariante sotto le rotazioni intorno ad \mathbf{a} e sotto le riflessioni di piani ortogonali o

paralleli ad \mathbf{a} prescindendo dal fatto che Ω sia oppure no simmetrico. È inoltre noto da Zheng [1994] che se un tensore del quarto ordine è trasversalmente isotropo rispetto a due assi non collineari, allora questo tensore deve essere isotropo. In particolare, considerato un dominio $3D$ quasi sferico di grado $n(n \neq 5)$, se è \mathcal{C}_n -simmetrico rispetto a due assi collineari. La figura 4.1 mostra alcuni esempi di domini quasi sferici di grado $n = 5$. L'icosaedro ed il dodecaedro sono due speciali quasi sferici di grado $n = 5$.

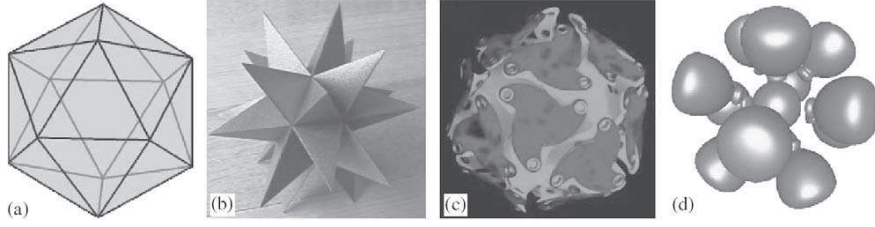


Figura 4.1: Esempi di domini quasi sferici di grado $n = 5$

Così il valore $\mathbb{S}^\Omega(0)$ del tensore di Eshelby per un dominio quasi sferico è uguale a $\mathbb{S}^0 \chi^\Omega(0)$. Risultati simili per icosaedri e dodecaedri regolari sono ottenuti da Nozaki e Taya [1997] attraverso analisi numeriche.

Un elenco completo di tutti i possibili gruppi di simmetria dei tensori di eventuali ordini elevati è stato dato da Zheng [1994]. In particolare, gli autori mostrano che tensori del quarto ordine possono avere al massimo 6 e 12 simmetrie, rispettivamente nel caso $2D$ e $3D$. Sulla base della struttura irriducibile di $\mathbb{S}^\Omega(0)$, per ogni dominio con simmetria rotazionale possiamo facilmente ottenere le corrispondenti forme ristrette di $\mathbb{S}^0 \chi^\Omega(0)$, mediante un metodo simile a quello mostrato sopra.

4.5 Tensore di Eshelby Medio

Si consideri l'origine come il centro di gravità di Ω e si consideri inoltre un set di punti

$$g^\Omega \mathbf{x} = \{\mathbf{R}\mathbf{x} : \mathbf{R} \in g^\Omega\}$$

generato da g^Ω in un qualsiasi punto \mathbf{x} assegnato. Dalla definizione, $g^\Omega \mathbf{x}$ appartiene a Ω se e solo se $\mathbf{x} \in \Omega$. Il tensore di Eshelby medio sarà

$$\bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{N^\Omega} \sum_{\mathbf{Q} \in g^\Omega}, \quad \mathbb{S}^\Omega(\mathbf{Q}\mathbf{x}) = \frac{1}{N^\Omega} \sum_{\mathbf{Q} \in g^\Omega} \mathbf{Q}^{\times 4} \mathbb{S}^\Omega(\mathbf{x}) \quad (4.67)$$

dove N^Ω indica il numero di elementi di g^Ω . Nella seconda delle equazioni (4.67), è stata utilizzata la proprietà di simmetria (4.61). Dal momento che la parte isotropa di \mathbb{S}^Ω è invariante per qualunque tensore di rotazione, si ha

$$\bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x}) = \mathbb{S}^0 \chi^\Omega + \bar{\mathbb{A}}^\Omega \quad (4.68)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{A}}^\Omega &= \frac{1}{N^\Omega} \sum_{\mathbf{Q} \in g^\Omega} \mathbf{Q}^{\times 4} \mathbb{A}^\Omega(\mathbf{x}) \\ \bar{\mathbb{d}}^\Omega &= \frac{1}{N^\Omega} \sum_{\mathbf{Q} \in g^\Omega} \mathbf{Q}^{\times 2} \mathbb{d}^\Omega(\mathbf{x}) \\ \bar{\mathbb{D}}^\Omega &= \frac{1}{N^\Omega} \sum_{\mathbf{Q} \in g^\Omega} \mathbf{Q}^{\times 4} \mathbb{D}^\Omega(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Notando la proprietà generale $(\mathbf{R}\mathbf{Q})^{\times 4} = \mathbf{R}^{\times 4} \mathbf{Q}^{\times 4}$ e la proprietà $\mathbf{R}\mathbf{Q} \in g^\Omega$ per qualsiasi $\mathbf{R}, \mathbf{Q} \in g^\Omega$, dall'equazione (4.67) si ottiene immediatamente la seguente invarianza:

$$\mathbf{R}^{\times 4} \bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x}) = \bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x}) \quad \text{oppure} \quad R_{im} R_{jn} R_{kr} R_{ls} \bar{S}_{mnr s}^\Omega = \bar{S}_{ijkl}^\Omega \quad \forall \mathbf{R} \in g^\Omega \quad (4.70)$$

Questo significa che il tensore del quarto ordine $\bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x})$ deve essere g -invariante. In altre parole, il tensore simmetrico medio $\bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x})$, in ogni punto \mathbf{x} , ha la stessa struttura simmetrica di $\mathbb{S}^\Omega(0)$. In particolare, se Ω è \mathcal{C}_n ($n \geq 3$, $n \neq 4$)-simmetrico in due dimensioni, o possiede simmetria quasi sferica in tre dimensioni, poi $\bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x})$ è uguale a $\mathbb{S}^0 \chi^\Omega(\mathbf{x})$.

A questo punto è possibile enunciare il seguente teorema. Il tensore di Eshelby \mathbb{S}^Ω per ogni $\Omega \in \mathcal{C}_n$ ($n \geq 3$, $n \neq 4$)-simmetrico in due dimensioni, o quasi sferico in tre dimensioni, ha le seguenti proprietà indipendenti dalla geometria di Ω :

1. il valore medio di \mathbb{S}^Ω su Ω è isotropo e coincide con il valore del tensore \mathbb{S}^0 per domini circolari bidimensionali, e per domini sferici nel caso tridimensionale;
2. il valore $\mathbb{S}^\Omega(0)$ nel punto centrale 0 è uguale a $\mathbb{S}^0 \chi^\Omega(0)$;

3. il tensore simmetrico medio $\bar{\mathbb{S}}^\Omega(\mathbf{x})$ è uguale a $\mathbb{S}^0\chi^\Omega(0)$.

Il teorema di cui sopra generalizza tutti i risultati simili, ottenuti da Nozaki e Taya [1997, 2001]; Kawashita e Nozaki [2001]; Franciosi [2005]; Wang e Xu [2004], che hanno ulteriori e varie restrizioni sui domini.

Capitolo 5

Tensore di Eshelby per lo stato piano di deformazione

5.1 Introduzione

In questo capitolo si riportano i calcoli per ricavare l'espressione algebrica del tensore di \mathbb{S} , per il problema di Eshelby nel caso bidimensionale. Detto problema, si verifica, quando l'inclusione ha una forma cilindrica nella direzione \mathbf{x}_3 , (stato piano di deformazione) cioè $-\infty \leq x_3 \leq +\infty$ con sezione retta di forma qualsiasi. Come visto nel capitolo 3, il problema di Eshelby, indica la valutazione dei campi elastici indotti in un mezzo di estensione infinita, dalla presenza di un'inclusione, soggetta ad un'autodeformazione costante. Nel caso bidimensionale, il tensore \mathbb{S} , è espresso in termini di integrali di superficie estesa a tutta l'area dell'inclusione. In questo caso, saranno considerate inclusioni di tipo poligonali, cioè costituite dall'unione di più tratti rettilinei. Mediante l'applicazione del teorema di Gauss, gli integrali di superficie vengono trasformati in integrali di linea, estesi ai lati dell'inclusione.

Nel caso di un'inclusione poligonale arbitraria, come mostrato nella figura 5.1, nell'ipotesi che $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ sia costante nell'inclusione, lo spostamento elastico in un generico

punto \mathbf{p} causato dall'inclusione, è dato dalla seguente relazione

$$u_i(\mathbf{p}) = - \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{p} - \mathbf{d})}{\partial x_l} d\mathbf{d} \right] C_{klmn} \varepsilon_{mn}^* \quad (5.1)$$

dove \mathbf{p} è il vettore posizione del punto in cui si sta valutando l'effetto, e \mathbf{d} (*dislocazione*) il punto in cui è applicata ε^* .

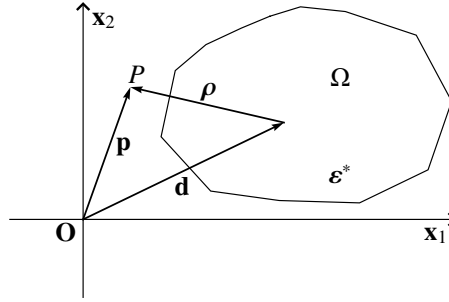


Figura 5.1: Inclusione Ω di forma poligonale

Per semplicità di notazione, si pone $\mathbf{p} - \mathbf{d} = \boldsymbol{\rho}$, cioè

$$\mathbf{p} - \mathbf{d} = \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} x - x_d \\ y - y_d \end{bmatrix}$$

Nel caso bidimensionale, il tensore $\mathbf{I}_{2D} = 1$, e da Mura [1987], la funzione di Green assume l'espressione

$$\begin{aligned} G_{ik}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \log \left(\frac{1}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right) \mathbf{I}_{2D} + \frac{\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right]_{ik} \\ &= U \left[\frac{\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} - (3-4\nu) \log (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}) \mathbf{I}_{2D} \right]_{ik} \end{aligned} \quad (5.2)$$

dove abbiamo si è posto $U = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}$.

Il tensore elastico che nel generico punto P , lega ε_{ij} a ε_{mn}^* , cioè che soddisfa l'uguaglianza

$$\varepsilon_{ij}(P) = S_{ijmn}(P) \varepsilon_{mn}^* \quad (5.3)$$

soddisfa anche la relazione

$$(\mathbb{S})_{ijmn} = S_{ijmn}(P)\varepsilon_{mn}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.4)$$

Sostituendo l'equazione (5.1) nell'equazione (5.4), si ha

$$S_{ijmn}(P)\varepsilon_{mn}^* = -\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\rho)}{\partial x_l \partial x_j} dA + \int_{\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\rho)}{\partial x_l \partial x_i} dA \right] C_{klmn} \varepsilon_{mn}^*$$

da cui semplificando il tensore ε_{mn}^* , si ha la seguente espressione di S_{ijmn}

$$S_{ijmn}(P) = -\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\rho)}{\partial x_l \partial x_j} dA + \int_{\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\rho)}{\partial x_l \partial x_i} dA \right] C_{klmn} \quad (5.5)$$

Il risultato ottenuto coincide con quello riportato in Kawashita e Nozaki [2001] scambiando tra loro gli indici k e l e osservando che C_{klmn} è simmetrico nei primi due indici.

Utilizzando il teorema di Gauss gli integrali nella (5.5), diventano:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\rho)}{\partial x_l \partial x_j} dA + \int_{\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\rho)}{\partial x_l \partial x_i} dA = \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\rho)}{\partial x_j} ds + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\rho)}{\partial x_i} ds \right] \nu_l \quad (5.6)$$

Per eseguire il calcolo degli integrali a secondo membro, è necessario eseguire le derivate parziali della funzione di Green riportata nell'equazione (5.2).

Allora la funzione integranda nel primo integrale a secondo membro dell'equazione (5.6), risulta

$$\begin{aligned} G_{ik/j} &= U \left\{ \left[\rho_i \rho_k (\rho \cdot \rho)^{-1} \right]_{/j} - (3 - 4\nu) \delta_{ik} \log(\rho \cdot \rho)_{/j} \right\} = \\ &= U \left\{ -\frac{2\rho_j}{(\rho \cdot \rho)^2} \rho_i \rho_k + \frac{\rho_{i/j} \rho_k}{\rho \cdot \rho} + \frac{\rho_i \rho_{k/j}}{\rho \cdot \rho} - (3 - 4\nu) \delta_{ik} \frac{2\rho_j}{\rho \cdot \rho} \right\} = \\ &= U \left\{ -\frac{2\rho_j \rho_i \rho_k}{(\rho \cdot \rho)^2} + \delta_{ij} \frac{\rho_k}{\rho \cdot \rho} + \frac{\rho_i}{\rho \cdot \rho} \delta_{kj} - 2(3 - 4\nu) \delta_{ik} \frac{\rho_j}{\rho \cdot \rho} \right\} = \\ &= U \left\{ -\frac{2\rho \otimes \rho \otimes \rho}{(\rho \cdot \rho)^2} + \mathbf{I}_{2D} \otimes \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} + \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} \boxtimes \mathbf{I}_{2D} - 2(3 - 4\nu) \mathbf{I}_{2D} \boxtimes \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

dove \otimes è il prodotto tensoriale o prodotto di Kronecker ed il prodotto \boxtimes è definito nella relazione (A.3).

Sostituendo l'espressione (5.7) nel primo integrale a secondo membro della (5.6), si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{ik} v_l}{\partial x_j} ds_c &= U \left\{ -2 \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\rho \otimes \rho \otimes \rho}{(\rho \cdot \rho)^2} ds_c \right]_{ikj} + \delta_{ij} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} ds_c \right]_k + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{kj} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} ds_c \right]_i + 2(3-4\nu) \delta_{ik} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} ds_c \right]_j \right\} \frac{(\Delta \rho_c^\perp)_l}{l_c} = \\
 &= U \left\{ -2(\mathbb{C}_{\bar{q}}^\dagger)_{ikj} + \delta_{ij}(\mathbf{C}_{\bar{q}})_k + \delta_{kj}(\mathbf{C}_{\bar{q}})_i + 2(3-4\nu) \delta_{ik}(\mathbf{C}_{\bar{q}})_j \right\} \frac{(\Delta \rho_c^\perp)_l}{l_c}
 \end{aligned} \quad (5.8)$$

dove abbiamo esplicitato la definizione di normale ad un lato: $v_l = \frac{(\Delta \rho_c^\perp)_l}{l_c}$.

Analogamente la funzione integranda nel secondo integrale a secondo membro dell'equazione (5.6)

$$\begin{aligned}
 G_{jk/i} &= U \left\{ [\rho_j \rho_k (\rho \cdot \rho)^{-1}]_{ji} - (3-4\nu) \delta_{jk} \log(\rho \cdot \rho)_{ji} \right\} = \\
 &= U \left\{ -\frac{2\rho_i}{(\rho \cdot \rho)^2} \rho_j \rho_k + \frac{\rho_{j/i} \rho_k}{\rho \cdot \rho} + \frac{\rho_j \rho_{k/i}}{\rho \cdot \rho} - (3-4\nu) \delta_{jk} \frac{2\rho_j}{\rho \cdot \rho} \right\} = \\
 &= U \left\{ -\frac{2\rho_i \rho_j \rho_k}{(\rho \cdot \rho)^2} + \delta_{ji} \frac{\rho_k}{\rho \cdot \rho} + \frac{\rho_j}{\rho \cdot \rho} \delta_{ki} - 2(3-4\nu) \delta_{jk} \frac{\rho_i}{\rho \cdot \rho} \right\} = \\
 &= U \left\{ -\frac{2\rho \otimes \rho \otimes \rho}{(\rho \cdot \rho)^2} + \mathbf{I}_{2D} \boxtimes \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} + \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} \otimes \mathbf{I}_{2D} - 2(3-4\nu) \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} \otimes \mathbf{I}_{2D} \right\}
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sostituendo l'espressione (5.9) nel secondo integrale a secondo membro della (5.6), si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{jk} v_l}{\partial x_i} ds_c &= U \left\{ -2(\mathbb{C}_{\bar{q}}^\dagger)_{jki} + \delta_{ji}(\mathbf{C}_{\bar{q}})_k + \delta_{jk}(\mathbf{C}_{\bar{q}})_i + \right. \\
 &\quad \left. + 2(3-4\nu) \delta_{jk}(\mathbf{C}_{\bar{q}})_i \right\} \frac{(\Delta \rho_c^\perp)_l}{l_c}
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

dove $v_l = \frac{(\Delta \rho_c^\perp)_l}{l_c}$ è la normale al lato l .

In definitiva, per ottenere l'espressione analitica del tensore S_{ijkl} è necessario calcolare i seguenti integrali:

$$\mathbf{C}_{\bar{q}} = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho}{\rho \cdot \rho} ds_c \quad (5.11)$$

e

$$\mathbb{C}_{\bar{q}}^{\hat{r}} = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho \otimes \rho \otimes \rho}{(\rho \cdot \rho)^2} ds_c \quad (5.12)$$

5.2 Espressione algebrica degli integrali $C_{\bar{q}}$ e $\mathbb{C}_{\bar{q}}^{\hat{r}}$

Per ricavare le relazioni degli integrali di linea si esegue la parametrizzazione del generico lato come funzione delle coordinate del vertice iniziale ρ_c e del vertice finale ρ_{c+1} del lato c -esimo, come riportato in figura 5.2.

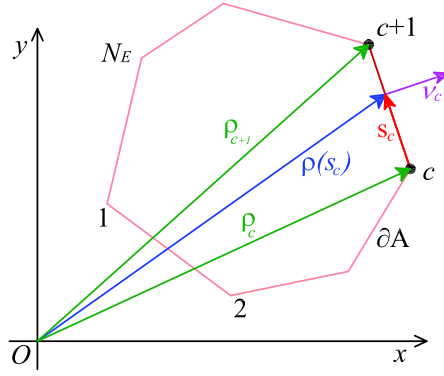


Figura 5.2: Parametrizzazione del lato c -esimo

Si consideri pertanto la relazione

$$\rho(s_c) = \rho_c + \lambda_c(\rho_{c+1} - \rho_c) = \rho_c + \lambda_c \Delta \rho_c \quad (5.13)$$

dove s_c è l'ascissa curvilinea, l_c è la lunghezza del lato e $\lambda_c = s_c/l_c$ è l'ascissa adimensionale lungo il lato c -esimo.

Si consideri inoltre il seguente prodotto scalare

$$\begin{aligned} \rho(s_c) \cdot \rho(s_c) &= (\rho_c + \lambda_c \Delta \rho_c) \cdot (\rho_c + \lambda_c \Delta \rho_c) = \\ &= \rho_c \cdot \rho_c + \lambda \rho_c \cdot \Delta \rho_c + \lambda \rho_c \cdot \Delta \rho_c + \lambda^2 \Delta \rho_c \cdot \Delta \rho_c = \\ &= u_c + 2q_c \lambda_c + p_c \lambda_c^2 = P_u(\lambda_c) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Tenendo conto dell'equazione (5.13) e (5.14), l'integrale $C_{\bar{q}}$ diventa

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\bar{q}} &= \int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} ds_c = \sum_{c=1}^{N_l} \int_{\mathbf{i}_c} \frac{\boldsymbol{\rho}(s_c)}{\boldsymbol{\rho}(s_c) \cdot \boldsymbol{\rho}(s_c)} ds_c = \sum_{c=1}^{N_l} l_c \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c \Delta \boldsymbol{\rho}_c}{P_u(\lambda_c)} d\lambda_c = \\
&= \sum_{c=1}^{N_l} l_c \left[\boldsymbol{\rho}_c \int_0^1 \frac{d\lambda_c}{P_u(\lambda_c)} + \Delta \boldsymbol{\rho}_c \int_0^1 \frac{\lambda_c}{P_u(\lambda_c)} d\lambda_c \right] = \\
&= \sum_{c=1}^{N_l} l_c \left[\boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}} + \Delta \boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}}' \right] = \sum_{c=1}^{N_l} l_c \mathbf{a}^c
\end{aligned} \tag{5.15}$$

dove N_l è il n° di lati della frontiera dell'inclusione, $\mathbf{a}^c = \boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}} + \Delta \boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}}'$ e gli integrali $I_{\bar{p}}, I_{\bar{p}}'$, sono calcolati rispettivamente nei paragrafi 5.4.1 e 5.4.2.

Per eseguire il calcolo del tensore $\mathbb{C}_{\bar{q}}^{\hat{r}}$ è necessario eseguire il prodotto tensoriale $\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}$, che alla luce del cambio di variabile (5.13), diventa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} &= (\boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c \Delta \boldsymbol{\rho}_c) \otimes (\boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c \Delta \boldsymbol{\rho}_c) \otimes (\boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c \Delta \boldsymbol{\rho}_c) = \\
&= (\boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c \Delta \boldsymbol{\rho}_c) \otimes \left[\boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c (\boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c + \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c) + \lambda_c^2 \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \right] = \\
&= \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c (\boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c + \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c) + \lambda_c^2 \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c + \\
&\quad + \lambda_c \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c + \lambda_c^2 (\Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c + \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c) + \lambda_c^3 \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c
\end{aligned} \tag{5.16}$$

posto: $\mathbb{R}_{\rho\rho\rho}^c = \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c$

$$\mathbb{R}_{\rho\rho\Delta\rho}^c = \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c + \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c + \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c$$

$$\mathbb{R}_{\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c = \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c + \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c + \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \boldsymbol{\rho}_c$$

$$\mathbb{R}_{\Delta\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c = \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_c$$

il prodotto $\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}$ diventa

$$\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} = \mathbb{R}_{\rho\rho\rho}^c + \lambda_c \mathbb{R}_{\rho\rho\Delta\rho}^c + \lambda_c^2 \mathbb{R}_{\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c + \lambda_c^3 \mathbb{R}_{\Delta\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c \tag{5.17}$$

alla luce della (5.16), l'integrale $\mathbb{C}_{\bar{q}}^{\hat{r}}$ diventa:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}_{\bar{q}}^{\hat{r}} &= \int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}}{[\boldsymbol{\rho}(s_c) \cdot \boldsymbol{\rho}(s_c)]^2} ds_c = \\
 &= \sum_{c=1}^{N_l} l_c \left\{ \int_0^1 \frac{\mathbb{R}_{\rho\rho\rho}^c + \lambda_c \mathbb{R}_{\rho\rho\Delta\rho}^c + \lambda_c^2 \mathbb{R}_{\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c + \lambda_c^3 \mathbb{R}_{\Delta\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c}{[P_u(\lambda_c)]^2} d\lambda_c \right\} = \\
 &= \sum_{c=1}^{N_l} l_c \left\{ \mathbb{R}_{\rho\rho\rho}^c \int_0^1 \frac{d\lambda_c}{[P_u(\lambda_c)]^2} + \mathbb{R}_{\rho\rho\Delta\rho}^c \int_0^1 \frac{\lambda_c}{[P_u(\lambda_c)]^2} d\lambda_c \right\} = \\
 &= \sum_{c=1}^{N_l} l_c \left\{ \mathbb{R}_{\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c \int_0^1 \frac{\lambda_c^2}{[P_u(\lambda_c)]^2} d\lambda_c + \mathbb{R}_{\Delta\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c \int_0^1 \frac{\lambda_c^3}{[P_u(\lambda_c)]^2} d\lambda_c \right\} = \\
 &= \sum_{c=1}^{N_l} l_c \left[\mathbb{R}_{\rho\rho\rho}^c I_{\bar{p}} + \mathbb{R}_{\rho\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^r + \mathbb{R}_{\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^{\bar{r}} + \mathbb{R}_{\Delta\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^{\hat{r}} \right] = \\
 &= \sum_{c=1}^{N_l} l_c \mathbb{A}^c
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

dove N_l è il n° di lati della frontiera dell'inclusione,

$$\mathbb{A}^c = \left[\mathbb{R}_{\rho\rho\rho}^c I_{\bar{p}} + \mathbb{R}_{\rho\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^r + \mathbb{R}_{\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^{\bar{r}} + \mathbb{R}_{\Delta\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^{\hat{r}} \right]$$

e gli integrali $I_{\bar{p}}$, $I_{\bar{p}}^r$, $I_{\bar{p}}^{\bar{r}}$, $I_{\bar{p}}^{\hat{r}}$ sono calcolati rispettivamente nei paragrafi 5.4.3, 5.4.4, 5.4.5 e 5.4.6.

Allora sostituendo le espressioni di $\mathbf{C}_{\bar{q}}$ e $\mathbb{C}_{\bar{q}}^{\hat{r}}$ nell'equazione (5.8), si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{ik}}{\partial x_j} \nu_l ds_c &= U \sum_{c=1}^{N_l} \left\{ -2 \left[\mathbb{R}_{\rho\rho\rho}^c I_{\bar{p}} + \mathbb{R}_{\rho\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^r + \mathbb{R}_{\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^{\bar{r}} + \mathbb{R}_{\Delta\rho\Delta\rho\Delta\rho}^c I_{\bar{p}}^{\hat{r}} \right]_{ikj} + \right. \\
 &\quad + \delta_{ij} \left[\boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}} + \boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}}^r \right]_k + \delta_{kj} \left[\boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}} + \boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}}^r \right]_i + \\
 &\quad \left. + 2(3-4\nu) \delta_{ik} \left[\boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}} + \boldsymbol{\rho}_c I_{\bar{p}}^r \right]_j \right\} \frac{(\Delta \boldsymbol{\rho}_c^\perp)_l}{l_c} = \\
 &= U \sum_{c=1}^{N_l} \left\{ -2A_{ikj}^c + \delta_{ij} a_k^c + \delta_{kj} a_i^c + 2(3-4\nu) \delta_{ik} a_j^c \right\} \frac{(\Delta \boldsymbol{\rho}_c^\perp)_l}{l_c}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

e analogamente

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_i} \nu_l ds_c = U \sum_{c=1}^{N_l} \left\{ -2A_{jki}^c + \delta_{ji} a_k^c + \delta_{ki} a_j^c + 2(3-4\nu) \delta_{jk} a_i^c \right\} \frac{(\Delta \boldsymbol{\rho}_c^\perp)_l}{l_c} \tag{5.20}$$

5.3 Espressione algebrica di \mathbb{S} nel caso bidimensionale

Dall'equazione (5.5), per eplicitare S_{ijmn} , è necessario il tensore di elasticità C_{klmn}

$$C_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \quad (5.21)$$

Quindi l'equazione (5.5) diventa

$$S_{ijmn}(P) = U \sum_{c=1}^{N_l} \left\{ \left[A_{ijk}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_k^c + \delta_{kj} a_i^c) - (3 - 4\nu) \delta_{ik} a_j^c \right] (\Delta \rho_c^\perp)_l + \right. \\ \left. + \left[A_{jik}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ji} a_k^c + \delta_{ki} a_j^c) - (3 - 4\nu) \delta_{jk} a_i^c \right] (\Delta \rho_c^\perp)_l \right\} C_{klmn} \quad (5.22)$$

Sostituendo l'espressione (5.21) nella (5.22), si ha

$$S_{ijmn}(P) = U \sum_{c=1}^{N_l} \left\{ (A_{ijk}^c + A_{jik}^c) (\Delta \rho_c^\perp)_l \left[\lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \right] - \right. \\ - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_k^c + \delta_{kj} a_i^c) (\Delta \rho_c^\perp)_l \left[\lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \right] - \\ - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_k^c + \delta_{kj} a_i^c) (\Delta \rho_c^\perp)_l \left[\lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \right] - \\ \left. - (3 - 4\nu) (\delta_{ik} a_j^c + \delta_{jk} a_i^c) (\Delta \rho_c^\perp)_l \left[\lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \right] \right\} \quad (5.23)$$

Il δ di Kronecher è simmetrico, ossia $\delta_{ij} = \delta_{ji} \forall (i, j)$, pertanto è possibile semplificare i prodotti

$$A_{ijk}^c \delta_{km} = A_{ijm}^c, A_{jik}^c \delta_{km} = A_{jim}^c,$$

$$a_k^c \delta_{km} = a_m^c, a_k^c \delta_{km} = a_m^c,$$

$$(\Delta \rho_c^\perp)_l \delta_{kl} = (\Delta \rho_c^\perp)_k,$$

$$(\Delta \rho_c^\perp)_l \delta_{ln} = (\Delta \rho_c^\perp)_n,$$

$$(\Delta \rho_c^\perp)_l \delta_{lm} = (\Delta \rho_c^\perp)_m,$$

$$\delta_{ik} \delta_{km} = \delta_{im}, \quad \delta_{jk} \delta_{km} = \delta_{jm}.$$

$$\delta_{ki} \delta_{km} = \delta_{mi}, \quad \delta_{kj} \delta_{km} = \delta_{mj},$$

$$\delta_{ki} \delta_{kn} = \delta_{ni}, \quad \delta_{kj} \delta_{kn} = \delta_{nj}.$$

Eseguendo i prodotti e mettendo in evidenza λ e μ , l'equazione (5.23) diventa

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}(P) = U \sum_{c=1}^{N_l} \Big\{ & \lambda \left[A_{ijk}^c + A_{jik}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_k^c + \delta_{kj} a_i^c) - \frac{1}{2} (\delta_{ji} a_k^c + \delta_{ki} a_j^c) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} (3 - 4\nu) (\delta_{ik} a_j^c + \delta_{jk} a_i^c) \Big] (\Delta \rho_c^\perp)_k \delta_{mn} + \\
 & + \mu \left[A_{ijm}^c + A_{jim}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_m^c + \delta_{mj} a_i^c) - \frac{1}{2} (\delta_{ji} a_m^c + \delta_{mi} a_j^c) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} (3 - 4\nu) (\delta_{im} a_j^c + \delta_{jm} a_i^c) \Big] (\Delta \rho_c^\perp)_n + \\
 & + \mu \left[A_{ijn}^c + A_{jin}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_n^c + \delta_{nj} a_i^c) - \frac{1}{2} (\delta_{ji} a_n^c + \delta_{ni} a_j^c) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (3 - 4\nu) (\delta_{jn} a_i^c + \delta_{in} a_j^c) \Big] (\Delta \rho_c^\perp)_m \Big\} \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Tenendo conto del legame $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$ e mettendo in evidenza μ , l'equazione (5.24) diventa:

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}(P) = U \sum_{c=1}^{N_l} \Big\{ & \frac{2\nu}{1-2\nu} \left[A_{ijk}^c + A_{jik}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_k^c + \delta_{kj} a_i^c) - \frac{1}{2} (\delta_{ji} a_k^c + \delta_{ki} a_j^c) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} (3 - 4\nu) (\delta_{ik} a_j^c + \delta_{jk} a_i^c) \Big] (\Delta \rho_c^\perp)_k \delta_{mn} + \\
 & + \left[A_{ijm}^c + A_{jim}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_m^c + \delta_{mj} a_i^c) - \frac{1}{2} (\delta_{ji} a_m^c + \delta_{mi} a_j^c) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} (3 - 4\nu) (\delta_{im} a_j^c + \delta_{jm} a_i^c) \Big] (\Delta \rho_c^\perp)_n + \\
 & + \left[A_{ijn}^c + A_{jin}^c - \frac{1}{2} (\delta_{ij} a_n^c + \delta_{nj} a_i^c) - \frac{1}{2} (\delta_{ji} a_n^c + \delta_{ni} a_j^c) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (3 - 4\nu) (\delta_{jn} a_i^c + \delta_{in} a_j^c) \Big] (\Delta \rho_c^\perp)_m \Big\} \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

dalla quale si evince che nel caso di materiale isotropo ed elastico lineare, il tensore di Eshelby, dipende soltanto da una sola costante elastica.

5.4 Integrali sul generico lato di lunghezza unitaria

Per calcolare gli integrali di linea visti in precedenza, si richiama il prodotto scalare definito nell'equazione (5.13)

$$\begin{aligned}
 \rho(s_c) \cdot \rho(s_c) &= (\rho_c + \lambda_c \Delta \rho_c) \cdot (\rho_c + \lambda_c \Delta \rho_c) = \\
 &= \rho_c \cdot \rho_c + \lambda \rho_c \cdot \Delta \rho_c + \lambda \rho_c \cdot \Delta \rho_c + \lambda^2 \Delta \rho_c \cdot \Delta \rho_c = \\
 &= u_c + 2q_c \lambda_c + p_c \lambda_c^2 = P_u(\lambda_c)
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Inoltre si pone

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda_c \\
 p_c &= (\rho_{c+1} - \rho_c) \cdot (\rho_{c+1} - \rho_c) = \Delta \rho_c \cdot \Delta \rho_c \\
 q_c &= \rho_c \cdot (\rho_{c+1} - \rho_c) = \rho_c \cdot \Delta \rho_c \\
 u_c &= \rho_c \cdot \rho_c
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Per ciascun integrale di linea, è stata eseguita l'integrazione analitica con il programma Mathematica® e poi sono stati eseguiti i passaggi per giungere all'espressione finale del generico integrale.

5.4.1 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}$

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{p}} &= \int_0^1 \frac{1}{p_c x^2 + 2q_c x + u_c} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \left\{ \arctan \left(\frac{q_c + p_c x}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \right) \right\}_0^1 = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \left[\arctan \frac{p_c + q_c}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} - \arctan \frac{q_c}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

5.4.2 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^r$

$$\begin{aligned}
I_{\bar{p}}^r &= \int_0^1 \frac{x}{p_c x^2 + 2q_c x + u_c} dx \\
&= \frac{1}{2p_c} \left\{ -2q_c \frac{\arctan\left(\frac{q_c + p_c x}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}}\right)}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} + \log(p_c x^2 + 2q_c x + u_c) \right\}_0^1 = \\
&= \frac{1}{2p_c} \left(\log \frac{p_c + 2q_c + u_c}{u_c} - 2q_c I_{\bar{p}} \right) = \\
&= \frac{1}{2p_c} \log \frac{p_c + 2q_c + u_c}{u_c} - \frac{q_c}{p_c} I_{\bar{p}}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

5.4.3 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}$

$$\begin{aligned}
I_{\bar{p}} &= \int_0^1 \frac{1}{(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)^2} dx = \\
&= \left\{ \frac{-q_c - p_c x}{2(q_c^2 - p_c u_c)(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)} - \frac{p_c}{2(q_c^2 - p_c u_c)} \frac{\arctan\left(\frac{q_c + p_c x}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}}\right)}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \right\}_0^1 = \\
&= \frac{p_c + q_c}{2(p_c u_c - q_c^2)(p_c + 2q_c + u_c)} - \frac{q_c}{2u_c(p_c u_c - q_c^2)} + \frac{p_c}{2(p_c u_c - q_c^2)} I_{\bar{p}} = \\
&= \frac{1}{2(p_c u_c - q_c^2)} \left[\frac{p_c + q_c}{(p_c + 2q_c + u_c)} - \frac{q_c}{u_c} + p_c I_{\bar{p}} \right]
\end{aligned}$$

5.4.4 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^r$

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{p}}^r &= \int_0^1 \frac{x}{(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)^2} dx = \\
 &= \left\{ \frac{q_c x + u_c}{2(q_c^2 - p_c u_c)(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)} - \frac{q_c}{2(q_c^2 - p_c u_c)} \frac{\arctan\left(\frac{q_c + p_c x}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}}\right)}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \right\}_0^1 = \\
 &= \frac{p_c + q_c}{2(q_c^2 - p_c u_c)(p_c + 2q_c + u_c)} - \frac{u_c}{2u_c(q_c^2 - p_c u_c)} + \frac{q_c}{2(q_c^2 - p_c u_c)} I_{\bar{p}} = \\
 &= \frac{1}{2(q_c^2 - p_c u_c)} \left[\frac{q_c + u_c}{(p_c + 2q_c + u_c)} - 1 + q_c I_{\bar{p}} \right]
 \end{aligned}$$

5.4.5 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^{\bar{r}}$

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{p}}^{\bar{r}} &= \int_0^1 \frac{x^2}{(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{q_c u_c + 2q_c^2 x - p_c u_c x}{p_c(p_c u_c - q_c^2)(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)} + \frac{u_c}{(p_c u_c - q_c^2)} \frac{\arctan\left(\frac{q_c + p_c x}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}}\right)}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \right\}_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{-p_c u_c + 2q_c^2 + q_c u_c}{p_c(p_c u_c - q_c^2)(p_c + 2q_c + u_c)} - \frac{q_c u_c}{p_c(p_c u_c - q_c^2)} + \frac{u_c}{(p_c u_c - q_c^2)} I_{\bar{p}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(p_c u_c - q_c^2)} \left[\frac{-p_c u_c + 2q_c^2 + q_c u_c}{(p_c + 2q_c + u_c)} - \frac{q_c}{p_c} + u_c I_{\bar{p}} \right]
 \end{aligned}$$

5.4.6 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}}^{\hat{r}}$

$$\begin{aligned}
I_{\bar{p}}^{\hat{r}} &= \int_0^1 \frac{x^3}{(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)^2} dx = \\
&= \frac{1}{2p_c^2} \left\{ -\frac{2q_c^2 u_c - p_c u_c^2 + 4q_c^3 x - 3p_c q_c u_c x}{(q_c^2 - p_c u_c)(p_c x^2 + 2q_c x + u_c)} + \frac{q_c(2q_c^2 - 3p_c u_c)}{(p_c u_c - q_c^2)} \frac{\arctan\left(\frac{q_c + p_c x}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}}\right)}{\sqrt{p_c u_c - q_c^2}} \right. \\
&\quad \left. + \log(p_c x^2 + 2q_c x + u_c) \right\}_0^1 = \\
&= \frac{1}{2p_c^2} \left[\frac{2q_c^2 u_c - p_c u_c^2 + 4q_c^3 - 3p_c q_c u_c}{(q_c^2 - p_c u_c)(p_c + 2q_c + u_c)} - \frac{2q_c^2 u_c - p_c u_c^2}{u_c(q_c^2 - p_c u_c)} I_{\bar{p}} \log\left(\frac{p_c + 2q_c + u_c}{u_c}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{2p_c^2(p_c u_c - q_c^2)} \left[2q_c^2 - p_c u_c - \frac{2q_c^2 u_c - p_c u_c^2 + 4q_c^3 - 3p_c q_c u_c}{(p_c + 2q_c + u_c)} \right. \\
&\quad \left. + q_c(2q_c^2 u_c - 3p_c u_c) I_{\bar{p}} \right] + \frac{1}{2p_c^2} \log\left(\frac{p_c + 2q_c + u_c}{u_c}\right)
\end{aligned}$$

Capitolo 6

Espressione analitica di \mathbb{S} per un'inclusione poliedrale

6.1 Introduzione

In questo capitolo si ricava l'espressione algebrica del tensore di \mathbb{S} , per il problema di Eshelby nel caso dell'inclusione con forma poliedrale. La locuzione “problema di Eshelby”, indica la valutazione dei campi elastici indotti in un mezzo di estensione infinita, dalla presenza di un'inclusione, soggetta ad un'autodeformazione costante. Nel caso tridimensionale, il tensore \mathbb{S} , è espresso in termini di integrali estesi al volume dell'inclusione. Mediante una prima applicazione del teorema di Gauss, gli integrali di volume vengono trasformati in integrali superficiali, estesi alle facce del poliedro; con una seconda applicazione del teorema di Gauss, gli integrali di superficie, vengono trasformati in integrali di linea estesi ai lati delle facce dell'inclusione.

Si consideri un'inclusione poliedrale Ω soggetta ad un'autodeformazione costante ϵ^* , immersa in una matrice infinita, come riportato in figura 6.1. Analogamente a quanto fatto per il caso bidimensionale, per ricavare l'espressione del tensore di Eshelby, nel caso $3D$, si richiama preliminarmente la trattazione dell'inclusione di Eshelby svolta nel capitolo 3.

Si consideri l'equazione (3.23)

$$T_{ik} = C_{ikmn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^*) \quad (6.1)$$

in assenza di forze di volume, le equazioni indefinite di equilibrio diventano

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \iff T_{ik/k} = 0 \iff C_{ikmn} (\varepsilon_{mn/k} - \varepsilon_{mn/k}^*) = 0 \quad (6.2)$$

Dalla definizione di Tensore di Deformazione, si ha

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} (u_{m/n} + u_{n/m}) \quad (6.3)$$

effettuando la derivata rispetto alla componente k -esima, si ha

$$\varepsilon_{mn/k} = \frac{1}{2} (u_{m/nk} + u_{n/mk}) \quad (6.4)$$

L'operatore elastico è simmetrico negli indici m e n , per cui

$$\varepsilon_{mn/k} = u_{m/nk} = \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_k} \quad (6.5)$$

di conseguenza la (6.2) diventa

$$C_{ikmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_n} - C_{ikmn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}^*}{\partial x_k} = 0 \quad (6.6)$$

Essendo $\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 \iff T_{ik/k} + b_i = 0$ la presenza dell'autodeformazione ε_{mn}^* è equivalente all'applicazione di forze di massa fittizie

$$b_i(\mathbf{r}) = -C_{ikmn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{r})}{\partial x_k} \quad (6.7)$$

Per le applicazioni successive cambiamo opportunamente gli indici nella (6.7), per cui si ha

$$b_k(\mathbf{r}) = -C_{klmn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}^*}{\partial x_l} \quad (6.8)$$

Lo spostamento in un generico punto \mathbf{r} dovuto all'applicazione della forza di massa fittizia \mathbf{b} è

$$u_i(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}) b_k(\mathbf{r}) d\boldsymbol{\eta} \quad (6.9)$$

sostituendo la (6.8) nella (6.9), si ha

$$u_i(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbb{R}^3} G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}) C_{klmn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}^*(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_s} d\boldsymbol{\eta} \quad (6.10)$$

Considerando la formula di integrazioni per parti, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k} d\mathbf{r} = - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k} d\mathbf{r} + \oint_S \mathbf{A} \mathbf{B} n_k dS \quad (6.11)$$

e Ω è l'intero spazio, se il prodotto \mathbf{AB} tende a zero all'infinito in modo sufficientemente veloce l'ultimo integrale nella formula precedente si annulla. Tale proprietà è sicuramente soddisfatta nel caso in esame poiché una delle funzioni è rappresentata dalla funzione di Green che fornisce effetti nulli all'infinito dovuti ad una causa agente in un punto qualsiasi. Quindi

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= - \int_{\mathbb{R}^3} G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}) C_{klmn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}^*(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_l} d\boldsymbol{\eta} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_l} C_{klmn} \varepsilon_{mn}^*(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_l} C_{klmn} \varepsilon_{mn}^*(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (6.12)$$

dove è stata considerata l'uguaglianza

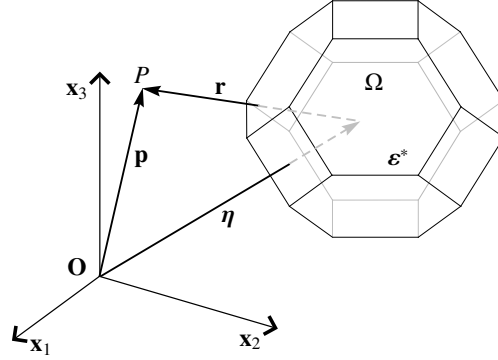
$$\frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_l} = - \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_l} \quad (6.13)$$

Si badi che la (6.12) sussiste se $\mathbf{r} \neq \boldsymbol{\eta}$, altrimenti G_{ik} e la sua derivata diventano singolari.

In definitiva se ε^* è costante in un dominio Ω , è possibile scrivere

$$u_i(\mathbf{r}) = - \left[\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta})}{\partial x_l} d\boldsymbol{\eta} \right] C_{klmn} \varepsilon_{mn}^* \quad (6.14)$$

Per calcolare gli integrali, si consideri un dominio poliedrale Ω ed un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale, (O, x, y, z) , avente origine nel punto O . Indicato con \mathbf{p} il vettore posizione dell'arbitrario punto P in cui si sta valutando l'effetto della presenza dell'inclusione, e con \mathbf{d} (*dislocazione*) il punto in cui è applicata l'autodeformazione ε^*

Figura 6.1: Inclusione poliedrale Ω

si ha

$$u_i(\mathbf{p}) = - \left[\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{p} - \mathbf{d})}{\partial x_l} d\mathbf{d} \right] C_{klmn} \varepsilon_{mn}^* \quad (6.15)$$

Per comodità di notazione, posto $\mathbf{p} - \mathbf{d} = \mathbf{r}$, l'equazione (6.15) diventa

$$u_i(\mathbf{p}) = - \left[\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_l} dA \right] C_{klmn} \varepsilon_{mn}^* \quad (6.16)$$

con

$$\mathbf{p} - \mathbf{d} = \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x - x_d \\ y - y_d \\ z - z_d \end{bmatrix}$$

Pertanto la funzione di Green assume l'espressione

$$\begin{aligned} G_{ik} &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \left[(3-4\nu) \mathbf{I}_{3D} + \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \right]_{ik} = \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} + (3-4\nu) \frac{\mathbf{I}_{3D}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right]_{ik} \end{aligned} \quad (6.17)$$

dove

$$\mathbf{I}_{3D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il tensore elastico che nel punto P unisce il tensore elastico ε_{ik} al tensore anelastico ε_{mn}^* , cioè che soddisfa l'uguaglianza

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{p}) = S_{ikmn}(P)\varepsilon_{mn}^* \quad (6.18)$$

soddisfa anche l'uguaglianza

$$S_{ikmn}(\mathbf{p})\varepsilon_{mn}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (6.19)$$

pertanto l'equazione (6.19) diventa

$$S_{ijmn}(\mathbf{p})\varepsilon_{mn}^* = -\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_j} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_i} dV \right] C_{klmn} \varepsilon_{mn}^*$$

da cui semplificando la ε_{mn}^* , si ha l'espressione del tensore di Eshelby

$$\begin{aligned} S_{ijmn}(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_j} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_i} dV \right] C_{klmn} = \\ &= -\frac{1}{2} [H_{ijkl}] C_{klmn} \end{aligned} \quad (6.20)$$

dove si è posto

$$(\mathbb{H})_{ijkl} = H_{ijkl} = \int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_j} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_i} dV \quad (6.21)$$

L'equazione (6.21) coincide con quella riportata in Kawashita e Nozaki [2001] scambiando tra loro gli indici k e l e osservando che \mathbb{C} è simmetrico nei primi due indici. Negli integrali presenti nell'equazione (6.21), compaiono le derivate parziali della funzione di Green, per cui è possibile applicare il teorema di Gauss, ottenendo gli integrali estesi alla frontiera del dominio. Essendo il dominio poliedrale, seguendo l'approccio di D'Urso [2014a], i precedenti integrali 3D saranno trasformati mediante successive applicazioni del teorema di Gauss, nella somma di integrali 1D estesi ai lati delle facce di Ω . A questo punto si sviluppano i due integrali nell'equazione (6.21)

$$\begin{aligned} H_{ijkl} &= \int_{\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_j} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{r})}{\partial x_l \partial x_i} dV = \\ &= \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_j} dA + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{r})}{\partial x_i} dA \right] \mathbf{n}_l \end{aligned} \quad (6.22)$$

dove \mathbf{n}_l è la normale alla frontiera $\partial\Omega$.

Per il primo integrale di frontiera, essendo

$$G_{ik} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} + (3-4\nu) \frac{\mathbf{I}_{3D}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right]_{ik} \quad (6.23)$$

e posto $Q = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}$, l'equazione (6.23) diventa

$$G_{ik} = Q \left[\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} + (3-4\nu) \frac{\mathbf{I}_{3D}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} \right]_{ik} \quad (6.24)$$

Derivando l'equazione (6.24) rispetto alla componente j -esima, si ha

$$\begin{aligned} G_{ik/j} &= Q \left\{ \left[r_i r_k (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{3}{2}} \right]_{/j} + (3-4\nu) \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \delta_{ik} \right]_{/j} \right\} = \\ &= Q \left\{ -\frac{3}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{5}{2}} 2r_i r_k r_j + \frac{r_{i/j} r_k}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_i r_{k/j}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} + (3-4\nu) \left(-\frac{1}{2} \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{3}{2}} 2r_j \delta_{ik} \right\} = \\ &= Q \left\{ -3 \frac{r_i r_k r_j}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{5}{2}}} + \delta_{ij} \frac{r_k}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_i}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} \delta_{kj} - (3-4\nu) \frac{r_j}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} \delta_{ik} \right\} \end{aligned}$$

derivando inoltre, l'equazione (6.24) rispetto alla componente i -esima, si ha

$$\begin{aligned} G_{jk/i} &= Q \left\{ \left[r_j r_k (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{3}{2}} \right]_{/i} + (3-4\nu) \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \delta_{jk} \right]_{/i} \right\} = \\ &= Q \left\{ -\frac{3}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{5}{2}} 2r_j r_k r_i + \frac{r_{j/i} r_k}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_j r_{k/i}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} + (3-4\nu) \left(-\frac{1}{2} \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{3}{2}} 2r_i \delta_{jk} \right\} = \\ &= Q \left\{ -3 \frac{r_j r_k r_i}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{5}{2}}} + \delta_{ji} \frac{r_k}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_j}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} \delta_{ki} - (3-4\nu) \frac{r_i}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} \delta_{jk} \right\} \end{aligned}$$

Il primo addendo a destra dell'uguaglianza nell'equazione (6.22) diventa

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_j} dA &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -3 \int_{F_f} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{5}{2}}} dA_f + \delta_{ji} \boxtimes \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} dA_f + \right. \\ &\quad \left. + \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} dA_f \boxtimes \delta_{ki} - (3-4\nu) \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} dA_f \otimes \delta_{jk} \right\} = \\ &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -3\mathbb{A}^f + \delta_{ji} \boxtimes \mathbf{a}^f + \mathbf{a}^f \boxtimes \delta_{ki} - (3-4\nu) \mathbf{a}^f \otimes \delta_{jk} \right\} = \\ &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -3A_{ikj}^f + \delta_{ji} a_k^f + a_j^f \delta_{ki} - (3-4\nu) a_i^f \delta_{jk} \right\} \end{aligned} \quad (6.25)$$

dove si è posto

$$\mathbb{A}^f = \int_{F_f} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{5}{2}}} dA_f, \quad \mathbf{a}^f = \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} dA_f. \quad (6.26)$$

Il secondo addendo a destra dell'uguaglianza nell'equazione (6.22) diventa

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{r})}{\partial x_i} dA &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -3 \int_{F_f} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{5}{2}}} dA_f + \delta_{ij} \boxtimes \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} dA_f + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} dA_f \boxtimes \delta_{kj} - (3 - 4\nu) \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{3}{2}}} dA_f \otimes \delta_{ik} \right\} = \\
 &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -3\mathbb{A}^f + \delta_{ij} \boxtimes \mathbf{a}^f + \mathbf{a}^f \boxtimes \delta_{kj} - (3 - 4\nu) \mathbf{a}^f \otimes \delta_{ik} \right\} = \\
 &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -3A_{jki}^f + \delta_{ij} a_k^f + a_j^f \delta_{kj} - (3 - 4\nu) a_j^f \delta_{ik} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Tenendo conto della (6.25) e della (6.27), il tensore (6.21), assume l'espressione:

$$\begin{aligned}
 H_{ijkl}(\mathbf{p}) &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -3A_{ikj}^f + \delta_{ji} a_k^f + a_j^f \delta_{ki} - (3 - 4\nu) a_i^f \delta_{jk} - \right. \\
 &\quad \left. - 3A_{jki}^f + \delta_{ij} a_k^f + a_i^f \delta_{kj} - (3 - 4\nu) a_j^f \delta_{ik} \right\} n_l
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Il tensore \mathbb{A}^f è simmetrico, sicché $A_{ikj}^f = A_{jki}^f = A_{ijk}^f$, mentre la δ è simmetrica negli indici i e j , per cui $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, conseguentemente, la (6.28) diventa

$$\begin{aligned}
 H_{ijkl}(\mathbf{p}) &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -6A_{ijk}^f + 2\delta_{ij} a_k^f + a_i^f \delta_{kj} + a_j^f \delta_{ki} - (3 - 4\nu) a_j^f \delta_{ik} - (3 - 4\nu) a_i^f \delta_{jk} \right\} n_l = \\
 &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ -6A_{ijk}^f + 2\delta_{ij} a_k^f + (4\nu - 2) a_j^f \delta_{ik} + (4\nu - 2) a_i^f \delta_{jk} \right\} n_l
 \end{aligned}$$

tenendo conto dell'espressione del tensore di elasticità

$$C_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \nu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \tag{6.29}$$

è possibile riscrivere il tensore di Eshelby come

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{2} Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left[-6A_{ijk}^f + 2\delta_{ij} a_k^f + (4\nu - 2) a_j^f \delta_{ik} + (4\nu - 2) a_i^f \delta_{jk} \right] n_l C_{klmn} = \\
 &= Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left[-6A_{ijk}^f + 2\delta_{ij} a_k^f + (4\nu - 2) a_j^f \delta_{ik} + (4\nu - 2) a_i^f \delta_{jk} \right] \times \\
 &\quad \times n_l \left[\lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \nu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \right]
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Eseguendo i prodotti

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}(\mathbf{p}) = & -\frac{1}{2}Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left[-6\lambda A_{ijk}^f n_l \delta_{kl} \delta_{mn} - 6\mu A_{ijk}^f n_l \delta_{km} \delta_{ln} - 6\mu A_{ijk}^f n_l \delta_{kn} \delta_{lm} + \right. \\
 & + 2\lambda \delta_{ij} a_k^f n_l \delta_{kl} \delta_{mn} + 2\mu \delta_{ij} a_k^f n_l \delta_{km} \delta_{ln} + 2\mu \delta_{ij} a_k^f n_l \delta_{kn} \delta_{lm} + \\
 & + \lambda(4\nu - 2) a_j^f \delta_{ik} n_l \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu(4\nu - 2) a_j^f \delta_{ik} n_l \delta_{km} \delta_{ln} + \mu(4\nu - 2) a_j^f \delta_{ik} n_l \delta_{kn} \delta_{lm} + \\
 & \left. + \lambda(4\nu - 2) a_i^f \delta_{jk} n_l \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu(4\nu - 2) a_i^f \delta_{jk} n_l \delta_{km} \delta_{ln} + \mu(4\nu - 2) a_i^f \delta_{jk} n_l \delta_{kn} \delta_{lm} \right]
 \end{aligned} \quad (6.31)$$

e tenendo conto delle proprietà di δ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

l'equazione (6.31) si può scrivere come

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}(\mathbf{p}) = & -\frac{1}{2}Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left[-6\lambda A_{ijk}^f n_k \delta_{mn} - 6\mu A_{ijm}^f n_n - 6\mu A_{ijn}^f n_m + \right. \\
 & + 2\lambda \delta_{ij} a_k^f n_k \delta_{mn} + 2\mu \delta_{ij} a_m^f n_n + 2\mu \delta_{ij} a_n^f n_m + \\
 & + \lambda(4\nu - 2) a_j^f n_i \delta_{mn} + \mu(4\nu - 2) a_j^f n_n \delta_{im} + \mu(4\nu - 2) a_j^f n_m \delta_{in} + \\
 & \left. + \lambda(4\nu - 2) a_i^f n_j \delta_{mn} + \mu(4\nu - 2) a_i^f n_n \delta_{jm} + \mu(4\nu - 2) a_i^f n_m \delta_{jn} \right]
 \end{aligned} \quad (6.32)$$

mettendo in evidenza λ e μ , si ha

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}(\mathbf{p}) = & -\frac{1}{2}Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ \lambda \left[-6A_{ijk}^f n_k + 2\delta_{ij} a_k^f n_k + (4\nu - 2) a_j^f n_i + (4\nu - 2) a_i^f n_j \right] \delta_{mn} + \right. \\
 & + \mu \left[-6A_{ijm}^f + 2\delta_{ij} a_m + (4\nu - 2) a_j^f \delta_{im} + (4\nu - 2) a_i^f \delta_{jm} \right] n_n + \\
 & \left. + \mu \left[-6A_{ijn}^f + 2\delta_{ij} a_n + (4\nu - 2) a_j^f \delta_{in} + (4\nu - 2) a_i^f \delta_{jn} \right] n_m \right\}
 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Tenendo conto dell'espressione di Q e del legame $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$, mettendo in evidenza μ ,

l'equazione (6.33) diventa

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}(\mathbf{p}) = & -Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left[-6A_{ijk}^f n_k + 2\delta_{ij} a_k^f n_k + (4\nu - 2) a_j^f n_i + (4\nu - 2) a_i^f n_j \right] \delta_{mn} + \right. \\
 & + \mu \left[-6A_{ijm}^f + 2\delta_{ij} a_m + (4\nu - 2) a_j^f \delta_{im} + (4\nu - 2) a_i^f \delta_{jm} \right] n_n + \\
 & \left. + \mu \left[-6A_{ijn}^f + 2\delta_{ij} a_n + (4\nu - 2) a_j^f \delta_{in} + (4\nu - 2) a_i^f \delta_{jn} \right] n_m \right\}
 \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned}
S_{ijmn}(\mathbf{p}) = -Q \sum_{f=1}^{N_{L_f}} \left\{ \frac{2\nu}{1-2\nu} \left[-6A_{ijk}^f n_k + 2\delta_{ij} a_k^f n_k + (4\nu-2)a_j^f n_i + (4\nu-2)a_i^f n_j \right] \delta_{mn} + \right. \\
+ \left[-6A_{ijm}^f + 2\delta_{ij} a_m + (4\nu-2)a_j^f \delta_{im} + (4\nu-2)a_i^f \delta_{jm} \right] n_n + \\
\left. + \left[-6A_{ijn}^f + 2\delta_{ij} a_n + (4\nu-2)a_j^f \delta_{in} + (4\nu-2)a_i^f \delta_{jn} \right] n_m \right\} \quad (6.35)
\end{aligned}$$

dalla quale si evince che nel caso di materiale isotropo ed elastico lineare, il tensore di Eshelby, dipende da una sola costante elastica.

6.2 Calcolo integrali \mathbb{A}^f e \mathbf{a}^f

Gli integrali da calcolare sono

$$\mathbb{A}^f = \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}_f \otimes \mathbf{r}_f \otimes \mathbf{r}_f}{(\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{r}_f)^{\frac{5}{2}}} dA_f, \quad \mathbf{a}^f = \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}_f}{(\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{r}_f)^{\frac{3}{2}}} dA_f. \quad (6.36)$$

Essendo il dominio poliedrale, si considera l'approccio proposto da D'Urso [2014a].

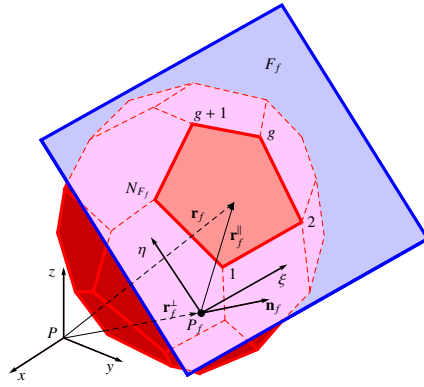


Figura 6.2: Sistema di riferimento 2D per la generica faccia F_f

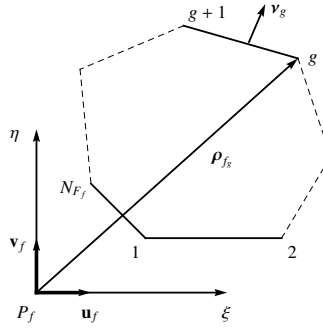


Figura 6.3: Vettore posizione 2D per il vertice g -esimo della faccia

La logica di tale approccio è applicare due volte il teorema di Gauss, una prima volta, si

esprimono gli integrali $3D$, come somma di integrali $2D$, estesi alle facce del poliedro $\partial\Omega$, e successivamente un'ulteriore applicazione del teorema di Gauss per trasformare gli integrali $2D$, nella somma di integrali $1D$ estesi ai lati della generica faccia F_f . Nella seconda applicazione del teorema di Gauss, è necessario introdurre un sistema di riferimento locale $2D$, definito su ciascuna faccia, la cui origine è opportunamente fissata con il punto P_f , rappresentante la proiezione del punto P sulla faccia F_f , come riportato nelle figure 6.2 e 6.3.

Per il calcolo degli integrali nell'equazione (6.26), si considera l'approccio proposto da D'Urso [2014b], sicché il vettore \mathbf{r}_f indicante la posizione del generico punto appartenente alla faccia F_f , si scompone nella forma

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_f^{\parallel} + \mathbf{r}_f^{\perp} = (\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{n}_f)\mathbf{n}_f + \mathbf{r}_f^{\parallel} = d_f\mathbf{n}_f + \mathbf{T}_{F_f}\boldsymbol{\rho}_f \quad (6.37)$$

cioè come somma dei vettori \mathbf{r}_f^{\perp} ortogonale alla faccia F_f e del vettore \mathbf{r}_f^{\parallel} parallelo alla faccia F_f , $d_f = \mathbf{r}_f \cdot \mathbf{n}_f$ rappresenta la distanza tra la faccia F_f e il punto la cui posizione è indicata con \mathbf{r} . Il vettore $\boldsymbol{\rho}_f = (\xi_f, \eta_f)$ nella espressione precedente rappresenta il vettore posizione di un generico punto, appartenente alla faccia f -esima rispetto al punto P_f e

$$\mathbf{T}_{F_f} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f1} & \mathbf{v}_{f1} \\ \mathbf{u}_{f2} & \mathbf{v}_{f2} \\ \mathbf{u}_{f3} & \mathbf{v}_{f3} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

è l'operatore lineare che trasforma il vettore $2D$ $\boldsymbol{\rho}_f$, nel vettore $3D$ \mathbf{r}_f^{\parallel} . I vettori \mathbf{u}_f e \mathbf{v}_f rappresentano due vettori unitari $3D$ paralleli alla faccia F_f . Nell'equazione (6.37), sono state impiegate lettere greche e romane per indicare rispettivamente vettori $2D$ e vettori $3D$.

Eseguito il cambio di variabile come riportato nell'equazione (6.37), si ha

$$\mathbf{a}^f = \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}_f}{(\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{r}_f)^{\frac{3}{2}}} dA_f = \int_{F_f} \frac{(d_f\mathbf{n}_f + \mathbf{T}_{F_f}\boldsymbol{\rho}_f)}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} dA_f \quad (6.39)$$

essendo \mathbf{n}_f e \mathbf{T}_{F_f} costanti su ciascuna faccia del poliedro Ω , si possono portare fuori dal segno di integrale, sicché

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^f &= d_f \mathbf{n}_f \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} + \mathbf{T}_{F_f} \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} dA_f = \\
&= d_f \mathbf{n}_f S_{\hat{q}} + \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\hat{q}}^r
\end{aligned} \tag{6.40}$$

dove si è posto

$$S_{\hat{q}} = \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}}$$

e

$$\mathbf{S}_{\hat{q}}^r = \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} dA_f$$

Per effettuare il calcolo dell'integrale \mathbf{a}^f , tenendo conto dell'equazione (6.37) ed essendo \mathbf{n}_f e \mathbf{T}_{F_f} costanti su ciascuna faccia del poliedro Ω , si possono portare fuori dal segno di integrale. Allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^f &= \int_{F_f} \frac{\mathbf{r}_f \otimes \mathbf{r}_f \otimes \mathbf{r}_f}{(\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{r}_f)^{\frac{5}{2}}} dA_f = \\
&= \int_{F_f} \frac{(d_f \mathbf{n}_f + \mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f) \otimes (d_f \mathbf{n}_f + \mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f) \otimes (d_f \mathbf{n}_f + \mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f)}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f = \\
&= d_f^3 \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} + \\
&+ d_f^2 \left(\mathbf{T}_{F_f} \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f + \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f + \right. \\
&+ \left. \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \otimes \mathbf{n}_f \right) + d_f \left(\mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \mathbf{T}_{F_f}^T + \right. \\
&+ \left. \int_{F_f} \frac{\mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f + \mathbf{T}_{F_f} \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \otimes \mathbf{n}_f \right) + \\
&+ \int_{F_f} \frac{\mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f
\end{aligned}$$

e cioè

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}^f &= d_f^3 \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f S_{\bar{q}} + \\
 &+ d_f^2 \left[\mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f + \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r + \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \otimes \mathbf{n}_f \right] + \\
 &+ d_f \left(\mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \mathbf{T}_{F_f}^T + \mathbb{B}_{\rho \mathbf{n} \rho} + \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \otimes \mathbf{n}_f \right) + \mathbb{B}_{\rho \rho \rho} = \\
 &= d_f^3 \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f S_{\bar{q}} + \\
 &+ d_f^2 \left(\mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r + \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \otimes \mathbf{n}_f + \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \otimes \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f \right) + \\
 &+ d_f \left(\mathbf{n}_f \otimes \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \mathbf{T}_{F_f}^T + \mathbb{B}_{\rho \mathbf{n} \rho} + \mathbf{T}_{F_f} \mathbf{S}_{\bar{q}}^r \otimes \mathbf{n}_f \right) + \mathbb{B}_{\rho \rho \rho}
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

dove si è posto

$$S_{\bar{q}} = \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} \tag{6.42}$$

$$\mathbf{S}_{\bar{q}}^r = \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \tag{6.43}$$

$$\mathbf{S}_{\bar{q}}^{\bar{r}} = \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \tag{6.44}$$

$$\mathbb{S}_{\bar{q}}^{\hat{r}} = \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \tag{6.45}$$

Per esplicitare i prodotti tensoriali $\mathbb{B}_{\rho \mathbf{n} \rho}$ e $\mathbb{B}_{\rho \rho \rho}$, nel vettore posizione $\boldsymbol{\rho}_f$ e nell'operatore lineare \mathbf{T}_{F_f} vengono eliminati i pedici relativi alla faccia f -esima, ottenendo un simbolismo più fluido:

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{B}_{\rho \mathbf{n} \rho})_{khm} &= \left(\int_{\Omega} \frac{\mathbf{T} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{T}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{1/2}} dA \right)_{khm} = \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{T} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{T}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{1/2}} \right)_{khm} dA = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{T} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{T})_{khm}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{1/2}} dA
 \end{aligned}$$

Dato un tensore \mathbf{T} e due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , si consideri la componente $(\cdot)_{khm}$ del seguente prodotto tensoriale

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{T})_{khm} = T_{kl} u_l v_h T_{mn} u_n = T_{kl} v_h T_{mn} (u_l u_n) = T_{kl} v_h T_{mn} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_{ln}$$

Sfruttando questo risultato si può scrivere

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{B}_{\rho\mathbf{n}\rho})_{khm} &= \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{T} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{T}]_{khm}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{1/2}} dA = \int_{\Omega} \frac{T_{kl}\rho_l n_h T_{mn}\rho_n}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{1/2}} dA = \\
 &= T_{kl}n_h T_{mn} \int_{\Omega} \frac{\rho_l \rho_n}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{1/2}} dA = T_{kl}n_h T_{mn} \left(\int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{1/2}} dA \right)_{ln} = \\
 &= T_{kl}n_h T_{mn} (\hat{\mathbb{S}}_{\hat{q}})_{ln}
 \end{aligned}$$

Analogamente per il tensore

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{B}_{\rho\rho\rho})_{kmr} &= \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{T}\boldsymbol{\rho} \otimes \mathbf{T}\boldsymbol{\rho} \otimes \mathbf{T}\boldsymbol{\rho})_{kmr}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{5/2}} dA = \int_{\Omega} \frac{T_{kl}\rho_l T_{mn}\rho_n T_{rs}\rho_s}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{5/2}} dA = \\
 &= T_{kl}T_{mn}T_{rs} \int_{\Omega} \frac{\rho_l \rho_n \rho_s}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{5/2}} dA = T_{kl}T_{mn}T_{rs} \left(\int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d^2)^{5/2}} dA \right)_{lns} = \\
 &= T_{kl}T_{mn}T_{rs} (\hat{\mathbb{S}}_{\hat{q}})_{lns}
 \end{aligned}$$

6.3 Valutazione analitica integrali sulla generica faccia

6.3.1 Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}$

Si consideri l'identità differenziale di Tang [2007]

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{u}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{u} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (6.46)$$

dove "grad" indica l'operatore gradiente e \mathbf{u} è un campo vettoriale continuo.

Si considerino inoltre le funzioni

$$f(\boldsymbol{\rho}, k) = (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + k^2)^{1/2}; \quad \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (6.47)$$

dove k è uno scalare arbitrario.

Applicando l'equazione (6.46) all'equazione (6.47), si ha la seguente relazione

$$\operatorname{div} [f(\boldsymbol{\rho}, k) \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho})] = \operatorname{grad} [f(\boldsymbol{\rho}, k)] \cdot \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) + f(\boldsymbol{\rho}, k) \operatorname{div} [\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho})] \quad (6.48)$$

Essendo

$$\operatorname{div} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] = 0 \quad \text{se } \boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{o} \quad (6.49)$$

e

$$\int_F \varphi(\boldsymbol{\rho}) \operatorname{div} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right] dA = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{o} \notin F \\ \alpha(\mathbf{o}) \varphi(\mathbf{o}) & \text{se } \mathbf{o} \in F \end{cases} \quad (6.50)$$

dove φ è un campo vettoriale continuo e α rappresenta la misura espressa in radianti dell'angolo solido dato dall'intersezione tra un dominio $2D$, Ω ed un intorno sferico del punto di singolarità \mathbf{o} .

Per calcolare l'equazione (6.58) è necessario sviluppare il seguente integrale

$$\begin{aligned} \int_F \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + k^2)^{1/2}} dA &= \int_F \left[\operatorname{grad} \frac{1}{f(\boldsymbol{\rho}, k)} \cdot \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{f(\boldsymbol{\rho}, k)} \operatorname{div} \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) \right] dA = \\ &= \int_F \left[-\frac{1}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + k^2)^{3/2}} + \frac{1}{f(\boldsymbol{\rho}, k)} \operatorname{div} \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) \right] dA \end{aligned} \quad (6.51)$$

Applicando il teorema di Gauss al primo mebro dell'equazione (6.51), l'integrale $S_{\hat{q}}$ diventa

$$\begin{aligned}
 S_{\hat{q}} &= \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} = - \int_F \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d_f^2)^{1/2}} dA + \\
 &\quad + \int_F \frac{dA}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d_f^2)^{1/2}} \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \\
 &= - \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d_f^2)^{1/2}} ds_f + \\
 &\quad + \int_F \frac{dA}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d_f^2)^{1/2}} \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \\
 &= -\mathbf{C}_{\bar{p}q}^r + \int_F \frac{dA}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d_f^2)^{1/2}} \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}}
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Nel punto $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{o}$, la quantità $\frac{dA}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d_f^2)^{1/2}} = \frac{1}{|d_f|}$, per cui nel caso che $d_f = 0$ la quantità $\frac{dA}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + d_f^2)^{1/2}}$ è singolare.

Tuttavia, come si evince nell'equazione (6.40), l'integrale $S_{\hat{q}}$ compare nel prodotto $d_f \mathbf{n}_f S_{\hat{q}}$, sicché nel caso $d_f = 0$, si ha $d_f \mathbf{n}_f S_{\hat{q}} = 0$ e quindi l'integrale $S_{\hat{q}}$ non necessita di essere calcolato.

Valutazione espressione analitica dell'integrale di frontiera $\mathbf{C}_{\bar{p}q}^r$

Poiché la frontiera ∂F_f della faccia F_f è costituita da segmenti rettilinei, l'integrale definito sulla frontiera ∂F_f può essere espresso come somma di integrali di linea definiti su ciascun lato della faccia

$$\mathbf{C}_{\bar{p}q}^r = \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f)(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{1/2}} ds_f = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \int_{l_g} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f)(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{1/2}} ds_g$$

dove N_{Ef} è il numero di lati della faccia F_f e $l_g = |\mathbf{r}_{f+1} - \mathbf{r}_f|$ è la lunghezza del lato g -esimo.

Per ricavare le relazioni degli integrali di linea si esegue la parametrizzazione del generico lato come funzione delle coordinate 2D del vertice iniziale e del vertice finale del lato, si consideri inoltre la relazione

$$\boldsymbol{\rho}_f(s_g) = \boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g(\boldsymbol{\rho}_{g+1} - \boldsymbol{\rho}_g) = \boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g \Delta \boldsymbol{\rho}_g \tag{6.53}$$

dove $\lambda_g = s_g/l_g$ è l'ascissa adimensionale lungo il lato g -esimo. È importante ricordare che la notazione è stata semplificata scrivendo λ_g al posto del simbolo corretto λ_{fg} . La stessa logica è stata usata per i simboli ρ_g e ρ_{g+1} i quali indicano i vettori posizione dei vertici del lato g -esimo della faccia F_f . In particolare $\rho_g = (\xi_g, \eta_g)$ è un vettore $2D$ le cui coordinate sono relative al sistema di riferimento locale di ciascuna faccia, come si può vedere dalle figure 6.2 e 6.3. Le quantità ρ_g e ρ_{g+1} , sono state ottenute dal sistema di riferimento cartesiano $3D$, invertendo la relazione (6.37), e cioè

$$\rho_f = \mathbf{T}_{F_f}^T(\mathbf{r}_f - d_f \mathbf{n}_f) \quad (6.54)$$

Il versore ν_g normale al lato g -esimo è per definizione

$$\nu = \frac{\rho_{g+1}^\perp - \rho_g^\perp}{l_g} = \frac{(\rho_{g+1} - \rho_g)^\perp}{l_g} = \frac{\Delta \rho_g^\perp}{l_g} \quad (6.55)$$

dove $(\cdot)^\perp$ indica il vettore ortogonale a (\cdot) .

Assumendo una circolazione in senso antiorario della frontiera ∂F_f , risulta $\rho_g^\perp = (\eta_g, -\xi_g)$. In virtù dell'equazione (6.53), sviluppiamo il seguente prodotto scalare

$$\begin{aligned} \rho(s_g) \cdot \rho(s_g) &= (\rho_g + \lambda_g \Delta \rho_g) \cdot (\rho_g + \lambda_g \Delta \rho_g) = \\ &= \rho_g \cdot \rho_g + \lambda \rho_g \cdot \Delta \rho_g + \lambda \rho_g \cdot \Delta \rho_g + \lambda^2 \Delta \rho_g \cdot \Delta \rho_g = \\ &= u_g + 2q_g \lambda_g + p_g \lambda_g^2 = P_u(\lambda_g) \end{aligned} \quad (6.56)$$

Inoltre si pone $w_g = u_g + d_f^2$ e $P_w(\lambda_g) = p_g \lambda_g^2 + 2q_g \lambda_g + w_g$

Essendo $\rho_f \cdot \nu_f$ costante sul lato g -esimo, è possibile portarlo fuori dal segno di integrazione, inoltre il prodotto $(\rho_f \cdot \nu)$ diventa $\rho_g \cdot \left(\frac{\rho_{g+1}^\perp - \rho_g^\perp}{l_g} \right)$, ossia $\frac{\rho_g \cdot \rho_{g+1}^\perp}{l_g}$. Alla luce di tutte le osservazioni, l'equazione (6.65) diventa

$$\begin{aligned} C_{pq}^r &= \int_{\partial F_f} \frac{\rho_f \cdot \nu_f}{(\rho_f \cdot \rho_f)(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{1/2}} ds_f = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} (\rho_g \cdot \nu_g) \int_{l_g} \frac{ds_g}{P_u(\lambda_g) [P_w(\lambda_g)]^{1/2}} = \\ &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} (\rho_g \cdot \rho_{g+1}^\perp) \int_0^1 \frac{d\lambda_g}{P_u(\lambda_g) [P_w(\lambda_g)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.57)$$

in definitiva si ha

$$\begin{aligned} S_{\hat{q}} &= \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} = \frac{\alpha_f}{|d_f|} - \sum_{g=1}^{N_{Ef}} (\boldsymbol{\rho}_g \cdot \boldsymbol{\rho}_{g+1}^\perp) \int_0^1 \frac{d\lambda_g}{(\boldsymbol{\rho}_g \cdot \boldsymbol{\rho}_g)(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{\alpha_f}{|d_f|} - \sum_{g=1}^{N_{Ef}} (\boldsymbol{\rho}_g \cdot \boldsymbol{\rho}_{g+1}^\perp) I_{\bar{p}q} \end{aligned} \quad (6.58)$$

dove $I_{\bar{p}q}$ è riportato nel paragrafo 6.4.2 e α_f è l'angolo solido definito nell'equazione (6.50)

6.3.2 Espressione analitica dell'integrale $S_{\hat{q}}^r$

Da Bowen e Wang [2008], si ha

$$\int_{\Omega} d_{\mathbf{p}} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{s}) dV(\mathbf{s}) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{p}, \mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}) dA(\mathbf{s}) \quad (6.59)$$

Si consideri la seguente identità

$$\frac{\boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + k^2)^{3/2}} = -d_{\boldsymbol{\rho}} \frac{1}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + k^2)^{1/2}} \quad (6.60)$$

Mediante l'equazione (6.59), si ha

$$\begin{aligned} S_{\hat{q}}^r &= \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} dA_f = \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\nu}_g}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{1/2}} ds_g = \\ &= - \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \boldsymbol{\nu}_g \int_{l_g} \frac{ds_g}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{1/2}} = - \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \boldsymbol{\nu}_g \int_0^1 \frac{d\lambda_g}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{1/2}} = \\ &= - \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \boldsymbol{\nu}_g I_q \end{aligned} \quad (6.61)$$

dove I_q è riportato nel paragrafo 6.4.1.

6.3.3 Espressione analitica dell'integrale $S_{\tilde{q}}$

Applicando l'equazione (6.46) all'equazione (6.42) si ha

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \left[(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f} \right] &= \operatorname{grad} \left[(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f} \right] + \\
 &+ (\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f} = \\
 &= -\frac{3}{2} \frac{2\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f} + \\
 &+ \frac{1}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f} = \\
 &= -\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} + \\
 &+ \frac{1}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f}
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

Applicando il teorema di Gauss al termine a primo membro nell'equazione (6.62), si ha

$$\int_F \operatorname{div} \left[(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f} \right] dA = \int_{\partial F} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f)(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds \tag{6.63}$$

tenendo conto delle equazioni (6.50), (6.62) e (6.63), l'equazione (6.42) diventa

$$\begin{aligned}
 S_{\tilde{q}} &= \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} = -\frac{1}{3} \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f)(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_i + \frac{1}{3} \frac{\alpha_f}{d_f^3} = \\
 &= -\frac{1}{3} \mathbf{C}_{\tilde{p}\tilde{q}}^{nr} + \frac{1}{3} \frac{\alpha_f}{d_f^3}
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

Valutazione espressione analitica dell'integrale di frontiera $\mathbf{C}_{\tilde{p}\tilde{q}}^{nr}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{\tilde{p}\tilde{q}}^{nr} &= \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f)(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f = \\
 &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \int_{l_g} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f)(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_g
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

dove N_{Ef} è il numero di lati della faccia F_f e $l_g = |\mathbf{r}_{f+1} - \mathbf{r}_f|$ è la lunghezza del lato g -esimo.

Parametrizzando il lato secondo la (6.53), sicché $ds_g = l_g d\lambda_g$ e tenendo conto della definizione di normale al lato $\nu = \frac{\Delta \rho_g^\perp}{l_g}$, la (6.71) diventa

$$\begin{aligned} C_{\bar{p}\bar{q}}^{nr} &= \int_{\partial F_f} \frac{\rho_f \cdot \nu_f}{(\rho_f \cdot \rho_f)(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} (\rho_g \cdot \rho_{g+1}^\perp) \int_0^1 \frac{d\lambda_g}{P_u(\lambda_g) [P_w(\lambda_g)]^{3/2}} = \\ &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} (\rho_g \cdot \rho_{g+1}^\perp) I_{\bar{p}\bar{q}} \end{aligned} \quad (6.66)$$

in definitiva

$$S_{\bar{q}} = \int_{F_f} \frac{dA_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{5/2}} = \frac{1}{3} \frac{\alpha_f}{d_f^3} - \frac{1}{3} \sum_{g=1}^{N_{Ef}} (\rho_g \cdot \rho_{g+1}^\perp) I_{\bar{p}\bar{q}} \quad (6.67)$$

dove $I_{\bar{p}\bar{q}}$ è calcolato nel paragrafo 6.4.3.

6.3.4 Espressione analitica dell'integrale $S_{\bar{q}}^r$

Applicando l'identità (6.46) alla quantità $(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{-3/2}$, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{-3/2} \right] &= -\frac{3}{2} \frac{2\rho_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{5/2}} = \\ &= -\frac{3\rho_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Applicando il teorema di Gauss al termine a primo membro nell'equazione (6.68), si ha

$$\int_F \operatorname{div} (\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{-3/2} dA = \int_{\partial F} \frac{\nu_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{3/2}} ds \quad (6.69)$$

tenendo conto della (6.68) e della (6.69), la (6.43) diventa

$$S_{\bar{q}}^r = \int_{F_f} \frac{\rho_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f = -\frac{1}{3} \int_{\partial F_f} \frac{\nu_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f = -\frac{1}{3} C_{\bar{q}}^n \quad (6.70)$$

Valutazione espressione analitica dell'integrale di frontiera $C_{\bar{q}}^n$

$$C_{\bar{q}}^n = \int_{\partial F_f} \frac{\nu_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \int_{l_g} \frac{\nu_f}{(\rho_f \cdot \rho_f + d_f^2)^{3/2}} ds_g \quad (6.71)$$

Parametrizzando il lato secondo la (6.53), sicché $ds_g = l_g d\lambda_g$ e tenendo conto della definizione di normale al lato $\mathbf{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp}{l_g}$, la (6.71) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\hat{q}}^n &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} l_g \mathbf{v}_f \int_0^1 \frac{1}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_g = \\ &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp \int_0^1 \frac{d\lambda_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp I_{\hat{q}} \end{aligned} \quad (6.72)$$

in definitiva

$$\mathbf{S}_{\hat{q}}^r = \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f = -\frac{1}{3} \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp I_{\hat{q}} \quad (6.73)$$

dove $I_{\hat{q}}$ è calcolato nel paragrafo (6.4.4)

6.3.5 Espressione analitica dell'integrale $\mathbf{S}_{\hat{q}}^r$

Applicando la (6.46) alla quantità $\left[(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \boldsymbol{\rho}_f \right]$, si ha

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \boldsymbol{\rho}_f \right] &= \boldsymbol{\rho}_f \otimes \left[-\frac{3}{2} \frac{2\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} \right] + \frac{\mathbf{I}_{2D}}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{3\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} + \frac{\mathbf{I}_{2D}}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Considerando l'identità differenziale di Bowen e Wang [2008]

$$\int_F \text{grad} \mathbf{u} dA = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} dA \quad (6.75)$$

Applicando la relazione (6.75) al termine a primo membro nella (6.74)

$$\int_{F_f} \text{grad} \left[(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \boldsymbol{\rho}_f \right] dA = \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \mathbf{v}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds \quad (6.76)$$

tenendo conto della (6.74) e della (6.76), la (6.44) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\hat{q}}^r &= \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f = \\ &= -\frac{1}{3} \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \mathbf{v}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f + \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} dA_f = \\ &= -\frac{1}{3} \mathbf{C}_{\hat{q}}^{nr} + \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \mathbf{S}_{\hat{q}}^r \end{aligned}$$

dove l'integrale $\mathbf{S}_{\hat{q}}^r$ è stato valutato nel sottoparagrafo (6.3.2)

Valutazione espressione analitica dell'integrale di frontiera $\mathbf{C}_{\hat{q}}^{nr}$

$$\mathbf{C}_{\hat{q}}^{nr} = \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \int_{l_g} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f \otimes \boldsymbol{\nu} \quad (6.77)$$

Parametrizzando il lato secondo la relazione $\boldsymbol{\rho}_f(s_g) = \boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g(\boldsymbol{\rho}_{g+1} - \boldsymbol{\rho}_g)$, sicché $ds_g = l_g d\lambda_g$ e tenendo conto della definizione di normale al lato $\boldsymbol{\nu} = \frac{\Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp}{l_g}$, la (6.77) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\hat{q}}^{nr} &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} l_g \left\{ \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} d\lambda_g + \int_0^1 \frac{(\boldsymbol{\rho}_{g+1} - \boldsymbol{\rho}_g)\lambda}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} d\lambda_g \right\} \otimes \boldsymbol{\nu} = \\ &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} l_g \left\{ \boldsymbol{\rho}_g \int_0^1 \frac{d\lambda_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} + \Delta \boldsymbol{\rho}_g \int_0^1 \frac{\lambda}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} d\lambda_g \right\} \otimes \frac{\Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp}{l_g} = \\ &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} [\boldsymbol{\rho}_g I_{\hat{q}} + \Delta \boldsymbol{\rho}_g I_{\hat{q}}^r] \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp \end{aligned} \quad (6.78)$$

in definitiva

$$\mathbf{S}_{\hat{q}}^r = \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f = \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \mathbf{S}_{\hat{q}}^r - \frac{1}{3} \sum_{g=1}^{N_{Ef}} [\boldsymbol{\rho}_g I_{\hat{q}} + \Delta \boldsymbol{\rho}_g I_{\hat{q}}^r] \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp \quad (6.79)$$

dove $I_{\hat{q}}$ è calcolato nel paragrafo 6.4.4 e $I_{\hat{q}}^r$ è calcolato nel paragrafo 6.4.5.

6.3.6 Espressione analitica dell'integrale $\mathbb{S}_{\hat{q}}^r$

Si consideri la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} [\text{grad}(\varphi \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]_{ijh} &= (\varphi a_i b_j)_{/h} = a_i b_j \varphi_{/h} + \varphi a_{i/h} b_j + \varphi a_i b_{j/h} = \\ &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b} + \varphi \mathbf{a} \otimes \text{grad} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6.80)$$

dove il simbolo \boxtimes è definito nella relazione (A.3) e \otimes indica il prodotto tensoriale (di Kronecker) di due tensori.

Il gradiente della quantità $[(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f]$ diventa

$$\begin{aligned} \text{grad} [(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f] &= \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \left[-\frac{3}{2} \frac{2\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{I}_{2D} \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} + \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \mathbf{I}_{2D}}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (6.81)$$

Applicando il teorema di Gauss al primo termine della (6.81) si ha

$$\int_{F_f} \text{grad} [(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{-3/2} \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f] dA = \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds \quad (6.82)$$

tenendo conto della (6.81) e della (6.82), la (6.45) diventa

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{\hat{q}}^r &= \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f \\ &= -\frac{1}{3} \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f + \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \boxtimes \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} dA_f + \\ &+ \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} dA_f \otimes \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} = -\frac{1}{3} \mathbb{C}_{\hat{q}}^{n\bar{r}} + \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \boxtimes \mathbf{S}_{\hat{q}}^r + \mathbf{S}_{\hat{q}}^r \otimes \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \end{aligned} \quad (6.83)$$

dove $\mathbf{S}_{\hat{q}}^r$ è valutato nel paragrafo 6.3.2.

Valutazione espressione analitica dell'integrale di frontiera $\mathbb{C}_{\hat{q}}^{n\bar{r}}$

$$\mathbb{C}_{\hat{q}}^{n\bar{r}} = \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \int_{l_g} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f \otimes \boldsymbol{\nu} \quad (6.84)$$

Parametrizzando il lato secondo la relazione $\boldsymbol{\rho}_f(s_g) = \boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g(\boldsymbol{\rho}_{g+1} - \boldsymbol{\rho}_g)$, sicché $ds_g = l_g d\lambda_g$ e tenendo conto della definizione di normale al lato $\boldsymbol{\nu} = \frac{\Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp}{l_g}$, la (6.84) diventa

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\hat{q}}^{n\bar{r}} &= \int_{\partial F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\nu}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{3/2}} ds_f = \sum_{g=1}^{N_{Ef}} l_g \left[\int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_g) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_g) d\lambda_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} \right] \otimes \frac{\Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp}{l_g} = \\ &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \left[\int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_g) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_g) d\lambda_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} \right] \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp \end{aligned} \quad (6.85)$$

Sviluppando il seguente prodotto tensoriale

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(\lambda_g) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_g) &= (\boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g \Delta \boldsymbol{\rho}_g) \otimes (\boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g \Delta \boldsymbol{\rho}_g) = \\ &= \boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g + \lambda \boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g + \lambda \Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g + \lambda^2 \Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g\end{aligned}\quad (6.86)$$

e sostituendo nella (6.85), si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\hat{q}}^{n\bar{r}} &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \left\{ (\boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g) \int_0^1 \frac{d\lambda_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + (\boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g + \Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g) \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + (\Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g) \int_0^1 \frac{\lambda^2 d\lambda_g}{[P_w(\lambda_g)]^{3/2}} \right\} \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp = \\ &= \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \left\{ (\boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g) I_{\hat{q}} + (\boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g + \Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g) I_{\hat{q}}^r + (\Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g) I_{\hat{q}}^{\bar{r}} \right\} \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp\end{aligned}\quad (6.87)$$

in definitiva

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{\hat{q}}^r &= \int_{F_f} \frac{\boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f \otimes \boldsymbol{\rho}_f}{(\boldsymbol{\rho}_f \cdot \boldsymbol{\rho}_f + d_f^2)^{5/2}} dA_f = \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} \boxtimes S_{\hat{q}}^r + S_{\hat{q}}^r \otimes \frac{\mathbf{I}_{2D}}{3} - \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_{g=1}^{N_{Ef}} \left\{ (\boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g) I_{\hat{q}} + (\boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g + \Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \boldsymbol{\rho}_g) I_{\hat{q}}^r + (\Delta \boldsymbol{\rho}_g \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g) I_{\hat{q}}^{\bar{r}} \right\} \otimes \Delta \boldsymbol{\rho}_g^\perp\end{aligned}\quad (6.88)$$

dove $I_{\hat{q}}$, $I_{\hat{q}}^r$ e $I_{\hat{q}}^{\bar{r}}$ sono calcolati rispettivamente nei paragrafi 6.4.4, 6.4.5 e 6.4.6.

6.4 Integrali sul generico lato di lunghezza unitaria

Per calcolare gli integrali di linea introdotti precedentemente, ricordiamo il prodotto scalare

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(s_g) \cdot \boldsymbol{\rho}(s_g) &= (\boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g \Delta \boldsymbol{\rho}_g) \cdot (\boldsymbol{\rho}_g + \lambda_g \Delta \boldsymbol{\rho}_g) = \\ &= \boldsymbol{\rho}_g \cdot \boldsymbol{\rho}_g + \lambda \boldsymbol{\rho}_g \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}_g + \lambda \boldsymbol{\rho}_g \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}_g + \lambda^2 \Delta \boldsymbol{\rho}_g \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}_g = \\ &= u_g + 2q_g \lambda_g + p_g \lambda_g^2 = P_u(\lambda_g)\end{aligned}\quad (6.89)$$

dove è stato posto $w_g = u_g + d_f^2$ e $P_w(\lambda_g) = p_g \lambda_g^2 + 2q_g \lambda_g + w_g$.

Inoltre si pone

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda_g \\
 p_g &= (\rho_{g+1} - \rho_g) \cdot (\rho_{g+1} - \rho_g) = \Delta\rho_g \cdot \Delta\rho_g \\
 q_g &= \rho_g \cdot (\rho_{g+1} - \rho_g) = \rho_g \cdot \Delta\rho_g \\
 u_g &= \rho_g \cdot \rho_g \\
 w_g &= \rho_g \cdot \rho_g + d_f^2
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

6.4.1 Espressione algebrica dell'integrale I_q

$$\begin{aligned}
 I_q &= \int_0^1 \frac{dx}{(p_g x^2 + 2q_g x + w_g)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{p_g}} \log \left\{ p_g x + q_g + \sqrt{p_g} \sqrt{p_g x^2 + 2q_g x + w_g} \right\}_0^1 = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{p_g}} \log \frac{p_g + q_g + \sqrt{p_g} \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}}{q_g + \sqrt{p_g + w_g}} = \frac{1}{\sqrt{p_g}} I_l
 \end{aligned}$$

dove si è posto

$$I_l = \log \frac{p_g + q_g + \sqrt{p_g} \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}}{q_g + \sqrt{p_g + w_g}} \tag{6.91}$$

6.4.2 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}q}$

$$I_{\bar{p}q} = \int_0^1 \frac{dx}{(p_g x^2 + 2q_g x + u_g)(p_g x^2 + 2q_g x + w_g)^{1/2}}$$

posto $t = x + q_g/p_g$ si ha

$$I_{\bar{p}q} = \frac{1}{p_g^{3/2}} \int_{q_g/p_g}^{1+q_g/p_g} \frac{dt}{(t^2 + A) \sqrt{t^2 + B}}$$

dove

$$A = \frac{u_g}{p_g} - \frac{q_g^2}{p_g^2} = \frac{p_g u_g - q_g^2}{p_g^2}, \quad B = \frac{d}{p_g} - \frac{q_g^2}{p_g^2} = \frac{p_g d - q_g^2}{p_g^2} \tag{6.92}$$

da Mathematica[®] si ottiene la seguente espressione

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{p}q} &= \frac{1}{p_g^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{A} \sqrt{B-A}} \arctan \left\{ \frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{A} \sqrt{B+t^2}} t \right\}^{1+\frac{q_g}{p_g}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{w_g - u_g} \sqrt{p_g u_g - q_g^2}} \left\{ \arctan \frac{(p_g + q_g) \sqrt{w_g - u_g}}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2} \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}} - \right. \\
 &\quad \left. - \arctan \frac{q_g \sqrt{w_g - u_g}}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2} \sqrt{w_g}} \right\} = \\
 &= \frac{1}{|d_f|} \frac{1}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2}} [AT1_g - AT2_g]
 \end{aligned} \tag{6.93}$$

dove è stato considerato che $\sqrt{w_g - u_g} = |d_f|$ e dove si è posto

$$AT1_g = \arctan \frac{|d_f|(p_g + q_g)}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2} \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}} \tag{6.94}$$

e

$$AT2_g = \arctan \frac{|d_f|q_g}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2} \sqrt{w_g}} \tag{6.95}$$

6.4.3 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\bar{p}\hat{q}}$

$$I_{\bar{p}\hat{q}} = \int_0^1 \frac{dx}{(p_g x^2 + 2q_g x + u_g)(p_g x^2 + 2q_g x + w_g)^{3/2}} \tag{6.96}$$

posto $t = x + q_g/p_g$ si ha

$$\begin{aligned}
 p_g x^2 + 2q_g x + u_g &= p_g \left(t - \frac{q_g}{p_g} \right)^2 + 2q_g \left(t - \frac{q_g}{p_g} \right) + u_g = \\
 &= p_g \left(t^2 + \frac{q_g^2}{p_g^2} - \frac{2tq_g}{p_g} \right) + 2q_g t - \frac{2q_g^2}{p_g} + u_g = \\
 &= p_g t^2 + \frac{q_g^2}{p_g} - 2tq_g + 2q_g t - \frac{2q_g^2}{p_g} + u_g = \\
 &= p_g t^2 + u_g - \frac{q_g^2}{p_g} = p_g \left(t^2 + \frac{u_g}{p_g} - \frac{q_g^2}{p_g^2} \right) = \\
 &= p_g (t^2 + A)
 \end{aligned} \tag{6.97}$$

dove

$$A = \frac{u_g}{p_g} - \frac{q_g^2}{p_g} = \frac{p_g u_g - q_g^2}{p_g^2} \quad (6.98)$$

Ponendo inoltre

$$B = \frac{d}{p_g} - \frac{q_g^2}{p_g} = \frac{p_g d - q_g^2}{p_g^2} \quad (6.99)$$

la (6.96) diventa:

$$I_{\bar{p}\hat{q}} = \frac{1}{p_g^{5/2}} \int_{q_g/p_g}^{1+q_g/p_g} \frac{dt}{(t^2 + A)(t^2 + B)^{3/2}} \quad (6.100)$$

da Mathematica[®] si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} I_{\bar{p}\hat{q}} &= \frac{1}{p_g^{5/2}} \left\{ \frac{t}{(A-B)B\sqrt{B+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{A}(B-A)^{3/2}} \arctan \left(\frac{t\sqrt{B-A}}{\sqrt{A}\sqrt{B+t^2}} \right) \right\}^{1+\frac{q_g}{p_g}} = \\ &= \frac{1}{p_g^{5/2}(A-B)B} \left[\frac{1+\frac{q_g}{p_g}}{\sqrt{B+(1+\frac{q_g}{p_g})^2}} - \frac{\frac{q_g}{p_g}}{\sqrt{B+(\frac{q_g}{p_g})^2}} \right] + \\ &+ \frac{1}{p_g^{5/2}\sqrt{A}(B-A)^{3/2}} \arctan \left[\frac{|d_f|(1+\frac{q_g}{p_g})}{\sqrt{\frac{p_g u_g - q_g^2}{p_g^2}} \sqrt{B+(1+\frac{q_g}{p_g})^2}} - \frac{|d_f|\frac{q_g}{p_g}}{\sqrt{\frac{p_g u_g - q_g^2}{p_g^2}} \sqrt{B+(\frac{q_g}{p_g})^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.101)$$

posto

$$B + \left(1 + \frac{q_g}{p_g}\right)^2 = \frac{w_g}{p_g} - \frac{q_g^2}{p_g^2} + 1 + \frac{q_g^2}{p_g^2} + \frac{2q_g}{p_g} = \frac{p_g + 2q_g + w_g}{p_g} \quad (6.102)$$

$$B + \left(\frac{q_g}{p_g}\right)^2 = \frac{w_g}{p_g} - \frac{q_g^2}{p_g^2} + \frac{q_g^2}{p_g^2} = \frac{w_g}{p_g} \quad (6.103)$$

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{p_g u_g - q_g^2}}{p_g} \quad (6.104)$$

effettuando le sostituzioni e semplificando si ottiene

$$\begin{aligned} I_{\bar{p}\hat{q}} &= \frac{1}{p_g} \frac{1}{d_f^2} \frac{1}{p_g w_g - q_g^2} \left[\frac{p_g + q_g}{p_g + 2q_g + w_g} - \frac{q_g}{w_g} \right] + \frac{1}{p_g^2} \frac{1}{d_f^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2}} \times \\ &\times \arctan \left[\frac{|d_f| \sqrt{p_g}(p_g + q_g)}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2} \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}} - \frac{|d_f| q_g \sqrt{p_g}}{\sqrt{p_g u_g - q_g^2} \sqrt{w_g}} \right] \end{aligned} \quad (6.105)$$

6.4.4 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\hat{q}}$

$$\begin{aligned}
 I_{\hat{q}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(p_g x^2 + 2q_g x + w_g)^{3/2}} = \\
 &= - \left\{ \frac{p_g x + q_g}{(q_g^2 - p_g w_g) \sqrt{p_g x^2 + 2q_g x + w_g}} \right\}_0^1 = \\
 &= \left[\frac{p_g + q_g}{(q_g^2 - p_g w_g) \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}} - \frac{q_g}{(q_g^2 - p_g w_g) \sqrt{w_g}} \right] = \\
 &= \frac{1}{(p_g w_g - q_g^2)} \left(\frac{p_g + q_g}{\sqrt{p_g^2 + 2q_g + w_g}} - \frac{q_g}{\sqrt{w_g}} \right)
 \end{aligned} \tag{6.106}$$

6.4.5 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\hat{q}}^r$

$$\begin{aligned}
 I_{\hat{q}}^r &= \int_0^1 \frac{x dx}{(p_g x^2 + 2q_g x + w_g)^{3/2}} = \\
 &= - \left\{ \frac{q_g x + w_g}{(q_g^2 - p_g w_g) \sqrt{p_g x^2 + 2q_g x + w_g}} \right\}_0^1 = \\
 &= - \left[\frac{q_g + w_g}{(q_g^2 - p_g w_g) \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}} - \frac{w_g}{(q_g^2 - p_g w_g) \sqrt{w_g}} \right]
 \end{aligned} \tag{6.107}$$

6.4.6 Espressione algebrica dell'integrale $I_{\hat{q}}^{\bar{r}}$

$$\begin{aligned}
I_{\hat{q}}^{\bar{r}} &= \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(p_g x^2 + 2q_g x + w_g)^{3/2}} = \\
&= \frac{1}{p_g^{3/2}} \left\{ \frac{\sqrt{p_g}}{(p_g w_g - q_g^2)} \frac{q_g w_g + 2q_g^2 x - p_g w_g x}{\sqrt{p_g x^2 + 2q_g x + w_g}} + \right. \\
&\quad \left. + \log \left[p_g x + q_g + \sqrt{p_g} \sqrt{p_g x^2 + 2q_g x + w_g} \right] \right\}_0^1 = \\
&= \frac{1}{p_g^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{p_g}}{(p_g w_g - q_g^2)} \frac{q_g w_g + 2q_g^2 - p_g w_g}{\sqrt{p_g + 2q_g + w_g}} + \right. \\
&\quad \left. + \log \left(p_g + q_g + \sqrt{p_g} \sqrt{p_g + 2q_g + w_g} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{p_g}}{(p_g w_g - q_g^2)} \frac{q_g c_g}{\sqrt{w_g}} - \log \left(q_g + \sqrt{p_g} \sqrt{w_g} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{p_g^{3/2}} \frac{\sqrt{p_g}}{(p_g w_g - q_g^2)} \left[\frac{q_g w_g + 2q_g^2 - p_g w_g}{\sqrt{p_g + 2q_g + w_g}} - q_g \sqrt{w_g} + \right. \\
&\quad \left. + \log \left(\frac{p_g + q_g + \sqrt{p_g} \sqrt{p_g + 2q_g + w_g}}{q_g + \sqrt{p_g w_g}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Capitolo 7

Applicazione nel caso bidimensionale: inclusione poligonale

Le formule ricavate nel capitolo 5 sono state implementate in un codice Matlab® e poi sono stati considerati esempi numerici presenti in letteratura al fine di verificarne la robustezza e l'efficacia.

In questo capitolo vengono eseguiti degli esempi presenti in letteratura per il caso bidimensionale.

7.0.7 Confronto con risultati riportati nell'esempio n.2 di Huang e altri [2009]

In questo esempio, vengono calcolate le componenti del tensore $\mathbb{S}(\mathbf{x})$, ottenute per un'inclusione debolmente non circolare, la cui frontiera ha equazione $\mathbf{x}' = r^{(m)}(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$ con $0 \leq \psi \leq 2\pi$, e

$$r^{(m)}(\psi) = 1 + 2 a_m \cos m\psi, \text{ con } a_m = 0.1 \quad (7.1)$$

dove m indica il grado di rugosità della frontiera e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Nel caso dell'inclusione in esame, l'equazione (7.1) presenta i seguenti coefficienti di forma

$$\begin{aligned} a_3 = -0.03, \quad b_4 = 0.02, \quad b_5 = 0.03, \quad a_{10} = -0.03, \\ \text{tutti gli altri } a_m = 0 \text{ e } b_m = 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

I punti \mathbf{x} nei quali si calcolano i valori di $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ hanno equazione

$$\mathbf{x} = \xi \mathbf{x}' = \xi r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$$

Per testare l'algoritmo implementato, si considerano due casi, in un primo, il punto \mathbf{x} è interno all'inclusione, sicché $\xi = 0.7$; in un secondo caso i punti sono esterni all'inclusione: $\xi = 1.3$; si considera inoltre un coefficiente di Poisson $\nu = 0.25$. I valori delle componenti di $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ calcolati, sono stati diagrammati insieme a ciascuna componente omologa riportata in Huang *e altri* [2009] nell'esempio n.2. Nei diagrammi, i tratti continui sono relativi ai risultati dell'algoritmo implementato, mentre i marker sono relativi ai valori riportati da Huang *e altri* [2009], i quali sono stati letti dai grafici mediante il software "Engauge Digitizer".

Componenti di $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ per punti interni all'inclusione

Dall'equazione (5.25) si ottengono le componenti di $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ del tensore di Eshelby \mathbb{S} lungo la curva avente espressione: $\mathbf{x} = 0.7 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$, con $0 \leq \psi \leq 2\pi$, figura 7.1b. Dal confronto delle componenti, figura 7.1a si evince che per il caso in esame l'algoritmo implementato fornisce risultati estremamente vicini a quelli mostrati dall'algoritmo di Huang.

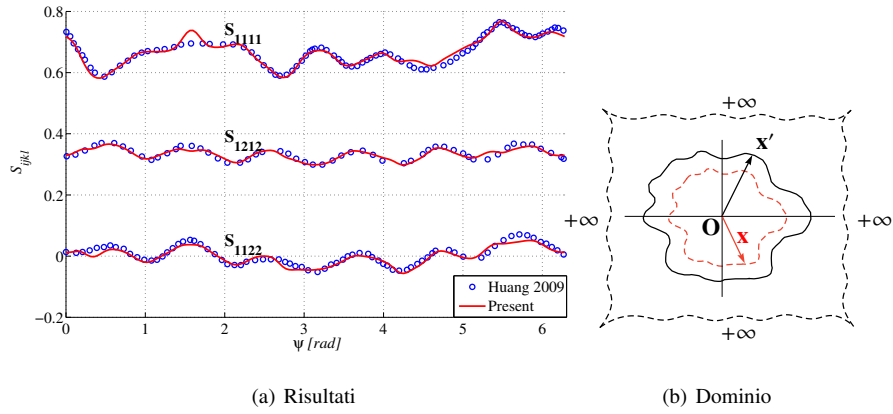


Figura 7.1: Componenti del tensore $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ lungo $\mathbf{x} = 0.7 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$.

Componenti di $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ per punti esterni all'inclusione

Dall'equazione (5.25) si ottengono le componenti di $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ del tensore di Eshelby \mathbb{S} lungo la curva avente espressione: $\mathbf{x} = 1.3 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$, con $0 \leq \psi \leq 2\pi$, figura 7.1b. Dal confronto delle componenti, figura 7.1a si evince che per il caso in

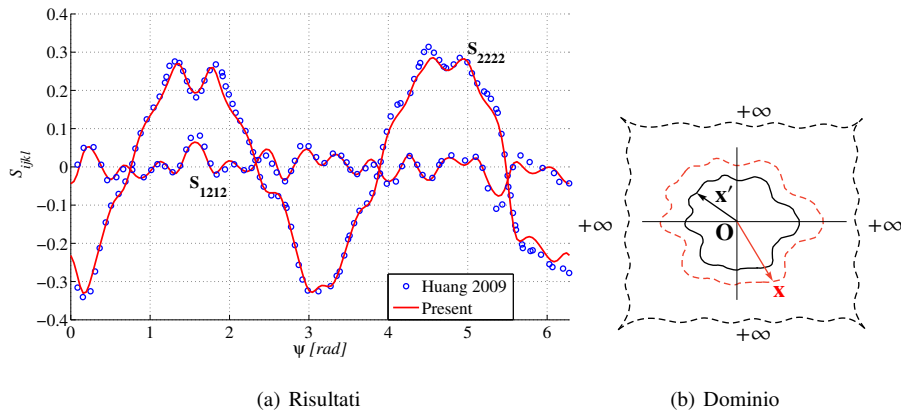


Figura 7.2: Componenti del tensore $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ lungo $\mathbf{x} = 1.3 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$.

esame l'algoritmo implementato fornisce risultati estremamente vicini a quelli mostrati dall'algoritmo di Huang.

7.0.8 Confronto con risultati riportati nell'esempio n.3 di Huang e altri [2009]

In questo esempio, viene valutata la robustezza dell'algoritmo, considerando un'inclusione debolmente non circolare, riprendendo l'esempio n.3 riportato in Huang e altri [2009]. In particolare si studia l'influenza sul tensore di Eshelby, del grado di rugosità della frontiera dell'inclusione. La funzione di forma dell'inclusione è:

$$r^{(m)}(\theta) = 1 + 2 a_m \cos m\theta, \quad \text{con } a_m = 0.1 \quad (7.3)$$

dove m indica il grado di rugosità della frontiera $\partial\Omega$ dell'inclusione Ω : al crescere di m , aumenta la rugosità della frontiera. Considerando un coefficiente di Poisson $\nu = 0.25$, dalla (5.25) otteniamo la componente $S_{1111}(\mathbf{x})$ del tensore di Eshelby \mathbb{S} lungo la direzione $\mathbf{x} = \xi \mathbf{r}^{(m)}\left(\frac{\pi}{6}\right) \left[\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right]^T$ per $0 \leq \xi \leq 3$. Per valori di m uguali a $m = 2$ e $m = 10$, i diagrammi di $S_{1111}(\mathbf{x})$ sono riportati nella figura 7.3. Dai diagrammi si evince che la fluttuazione di \mathbb{S} vicino alla frontiera, aumenta al crescere di m .

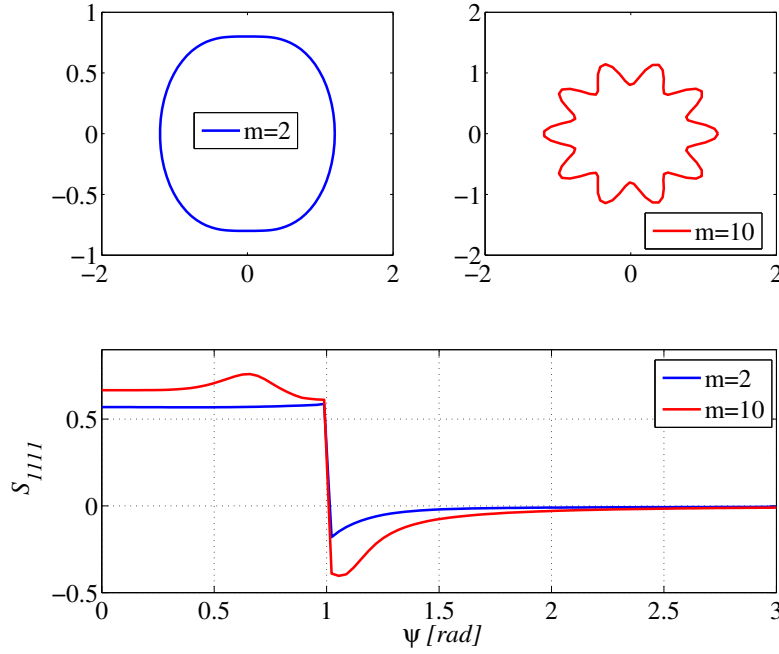


Figura 7.3: Componente $S_{1111}(\mathbf{x})$ del tensore di Eshelby lungo $\mathbf{x} = \xi \mathbf{r}^{(m)}\left(\frac{\pi}{6}\right) \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}^T$ per $0 \leq \xi \leq 3$ e $m = 2, 10$.

7.0.9 Confronto con risultati riportati nell'esempio n.4 di Huang e altri [2009]

In questo esempio, viene valutata la robustezza dell'algoritmo, considerando un'inclusione debolmente non circolare, riprendendo l'esempio n.4 riportato in Huang e altri [2009].

Si consideri l'inclusione Ω , data dall'equazione

$$r(\theta) = 1 + 2a_4 \cos 4\theta \quad (7.4)$$

Nel caso dell'inclusione in esame, la (7.4) presenta i seguenti parametri

$$\begin{aligned} a_4 &= 0.03, \quad \Delta T = 10^\circ \text{C}, \quad \nu = 0.25, \\ E &= 2 \times 10^5 \text{ MPa}, \quad \beta = 2 \times 10^{-7} / ^\circ \text{C} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Si assume che l'autodeformazione ε^* sia dovuta ad una variazione di temperatura ΔT in Ω

$$\varepsilon_{ij}^* = (1 + \nu)\beta\Delta T\delta_{kl} \quad (7.6)$$

dove β è il coefficiente di espansione termica. Conseguentemente il campo di deformazione indotto dalla ε^* è il seguente

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = S_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}^* = S_{ijkl}(\mathbf{x})(1 + \nu)\beta\Delta T\delta_{kl} \quad (7.7)$$

Pertanto il tensore di tensione è

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}[\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{kl}^*] \quad (7.8)$$

Per continuare a testare la robustezza dell'algoritmo, si calcolano le componenti di tensione σ_{ij} lungo due curve, rispettivamente di equazioni $\mathbf{x} = 0.85 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$ e $\mathbf{x} = 1.3 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$ con $0 \leq \psi < \pi/2$. I diagrammi di $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ sono riportati nella figura 7.4, e nella figura 7.5.

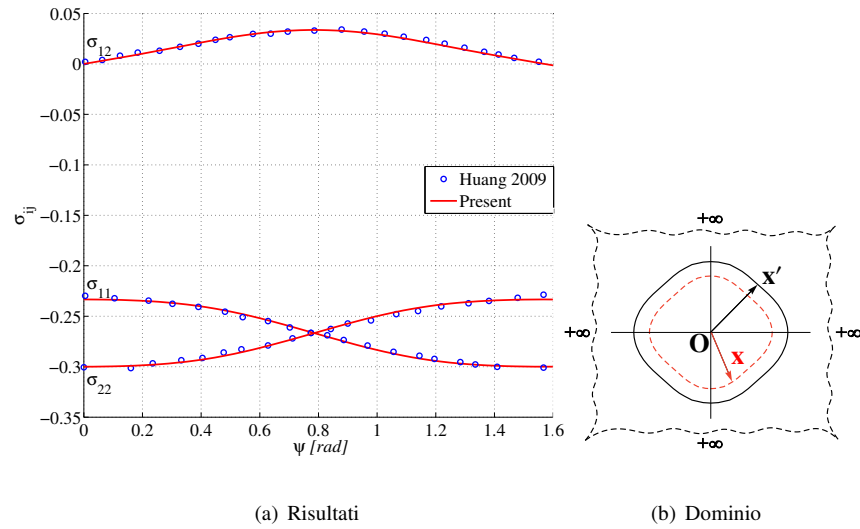


Figura 7.4: Componente σ_{ij} lungo $\mathbf{x} = 0.85 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$ $0 \leq \psi < \pi/2$.

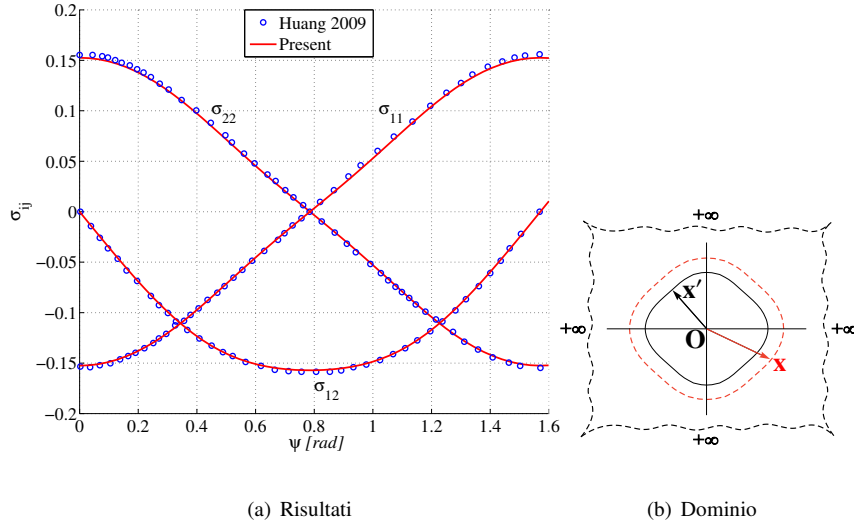


Figura 7.5: Componente σ_{ij} lungo $\mathbf{x} = 1.3 r(\psi) [\cos \psi, \sin \psi]^T$ $0 \leq \psi < \pi/2$.

7.1 Tensore mediato sul dominio dell'inclusione

Come riportato nel capitolo 9 nelle tecniche di omogeneizzazione Mean-Field, è necessario calcolare il valore $\bar{\mathbb{S}}$ del tensore di Eshelby mediato sul dominio dell'inclusione. Il calcolo analitico di questo tensore è molto complesso anche per forme semplici, come visto nel capitolo 4. Un modo più semplice è approssimare il dominio con un numero di punti finito e mediare il tensore su questi punti.

Considerando allora un generico rettangolo con lati l_x e l_y , per eseguire il calcolo del tensore medio, si approssima il rettangolo con n_x punti lungo la direzione \mathbf{x} e n_y punti lungo la direzione \mathbf{y} .

Per definizione, il valore medio del tensore \mathbb{S} è

$$\bar{\mathbb{S}} = \frac{1}{A} \int_A \mathbb{S} dA \quad (7.9)$$

Discretizzando il problema, ossia ipotizzando di concentrare la superficie che circonda il generico punto nel punto stesso, la (7.9) diventa

$$\bar{\mathbb{S}} = \frac{1}{l_x l_y} \sum_{N_p} \left[\mathbb{S}(P_i) \frac{l_x}{(n_x + 1)} \frac{l_y}{(n_y + 1)} \right] = \frac{1}{(n_x + 1)(n_y + 1)} \sum_{N_p} \mathbb{S}(P_i) \quad (7.10)$$

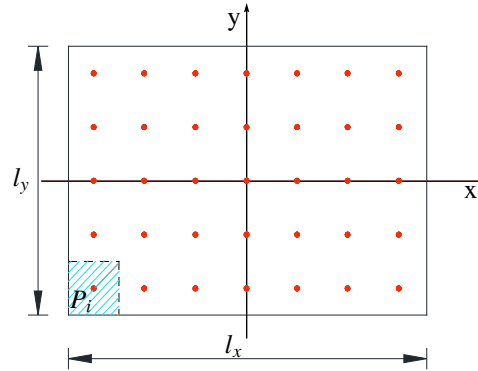


Figura 7.6: Dominio discretizzato in un numero finito di punti

In questa sede si riporta il calcolo del tensore $\bar{\mathbb{S}}$ per inclusione quadrata. Si consideri l'esempio 4.3 riportato in Zou e altri [2010]: in esso si considera un'inclusione di forma quadrata, un coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$ e si riporta in un diagramma l'errore commesso al variare del numero di punti con i quali si approssima l'inclusione.

Da Zou e altri [2010] la componente \bar{S}_{1212} è:

$$\bar{S}_{1212} = \frac{\pi(1 - \nu) - \ln 2}{2\pi(1 - \nu)} = 0.3424 \quad (7.11)$$

Variando il numero di punti si ottengono errori via via decrescenti. Come esempio sono stati considerati punti da 10 a 100 incrementandoli di 5 punti alla volta, e gli errori si sono ridotti:

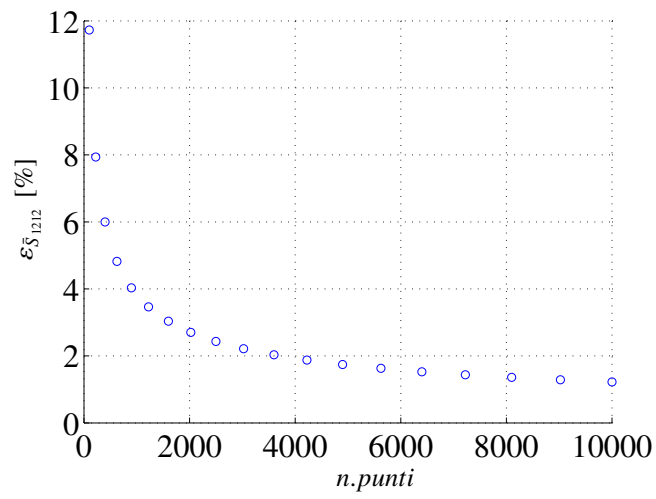


Figura 7.7: Errore su \bar{S}_{1212} al variare del numero di punti

Capitolo 8

Applicazione nel caso tridimensionale: inclusione poliedrale

8.1 Caso della sfera

Come visto in precedenza, nel caso della sfera, il tensore \mathbb{S} ha un'espressione in forma chiusa che non dipende dalla dimensione della stessa, ma solo dalle proprietà elastiche del materiale e il suo valore è riportato nella relazione (8.1). Per validare le formule ricavate nel paragrafo 6, sono state implementate in un codice Matlab[®] e poi sono stati considerati esempi numerici presenti in letteratura al fine di verificarne la robustezza e l'efficacia.

8.1.1 Confronto con risultati numerici esatti, nel caso della sfera

In questo primo esempio, una sfera è stata approssimata da un poliedro tridimensionale, composto da facce triangolari. La generica circonferenza data dall'intersezione di un piano con la sfera, è stata approssimata con un poligono con lati rettilinei. La pro-

cedura è stata applicata più volte, aumentando il numero di tratti con cui si approssima la circonferenza, in modo tale da valutare l'errore dovuto all'approssimazione della sfera, con un poliedro. Si è constatato, che al crescere del numero di tratti, il valore del tensore \mathbb{S} calcolato, si avvicina al valore esatto della sfera. In particolare sono stati eseguiti tre calcoli, nel primo la circonferenza viene approssimata con 10 tratti, nella seconda con 20 tratti e nella terza con 40 tratti. Inoltre per ciascun caso, vengono riportati anche gli errori relativi di ciascuna componente del tensore calcolato, rispetto alle componenti del tensore esatto.

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0.5238 & 0.0476 & 0.0476 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0476 & 0.5238 & 0.0476 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0476 & 0.0476 & 0.5238 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4762 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4762 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Suddividendo il cerchio in 10 tratti, si ottengono le seguenti componenti di \mathbb{S}

$$\mathbb{S}_{10} = \begin{bmatrix} 0.5291 & 0.0477 & 0.0505 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0477 & 0.5291 & 0.0505 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0447 & 0.0447 & 0.5131 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4736 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4736 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

e con errori relativi

$$\Delta_{10} = \begin{bmatrix} 0.0102 & 0.0018 & 0.0596 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0018 & 0.0102 & 0.0596 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0603 & 0.0603 & 0.0205 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0110 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0054 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0054 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Suddividendo il cerchio in 20 tratti, si ottengono le seguenti componenti di \mathbb{S}

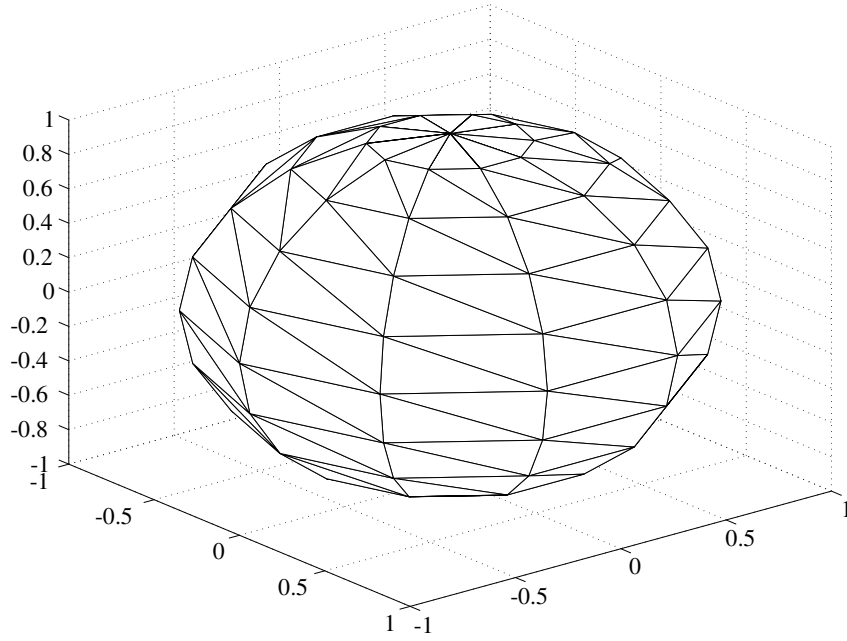


Figura 8.1: Sfera approssimata da un solido avente faccie piane. La generica circonferenza è approssimata con 10 tratti

$$\mathbb{S}_{20} = \begin{bmatrix} 0.5251 & 0.0476 & 0.0483 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0476 & 0.5251 & 0.0483 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0469 & 0.0469 & 0.5212 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4775 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4755 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4755 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

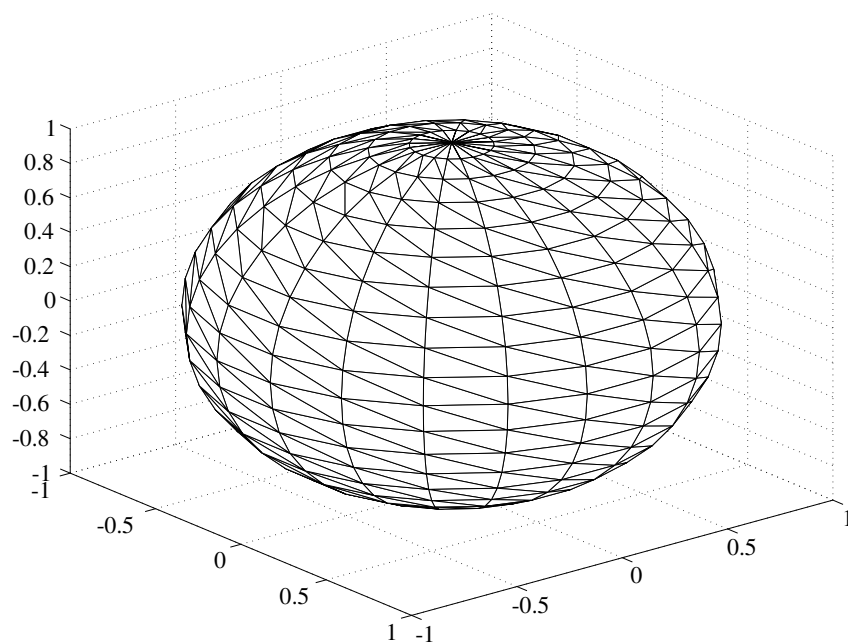


Figura 8.2: Sfera approssimata da un solido avente faccie piane. La generica circonferenza è approssimata con 20 tratti

e con errori relativi

$$\Delta_{20} = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0005 & 0.0147 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0005 & 0.0025 & 0.0147 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0151 & 0.0151 & 0.0051 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0027 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Suddividendo il cerchio in 40 tratti, si ottengono le seguenti componenti di \mathbb{S}

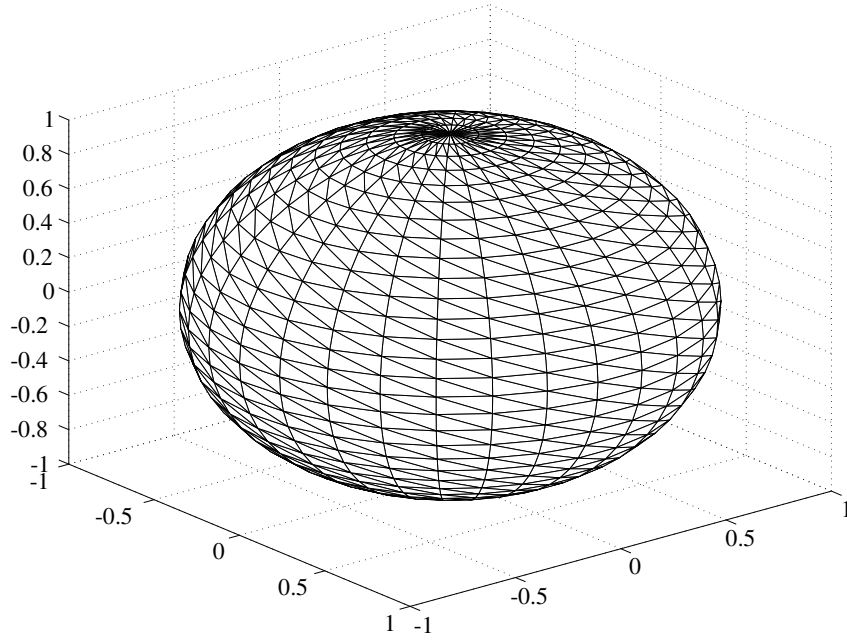


Figura 8.3: Sfera approssimata da un solido avente faccie piane. La generica circonferenza è approssimata con 40 tratti

$$\mathbb{S}_{40} = \begin{bmatrix} 0.5241 & 0.0476 & 0.0478 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0476 & 0.5241 & 0.0478 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0474 & 0.0474 & 0.5231 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4765 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4760 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4760 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

e con errori relativi

$$\Delta_{40} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0001 & 0.0037 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0006 & 0.0037 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0038 & 0.0038 & 0.0013 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

8.2 Esempi di Gao e Liu [2012]

Altri risultati numerici presi come riferimento per validare le formule ricavate nel paragrafo 6, sono quelli riportati in Gao e Liu [2012], in particolare sono studiati quantitativamente tre tipi di inclusioni poliedrali (cubo, ottaedro, e tetraedro).

8.2.1 Caso del cubo

Considerando un cubo, cioè un solido costituito da $p=6$ lati, il cui lato ha ampiezza pari a 2, calcolano le componenti del tensore \mathbb{S} al variare del punto \mathbf{x} all'interno dell'inclusione, riportato in figura 8.4. Considerato il sistema di riferimento cartesiano coincidente con il baricentro del cubo e con gli assi paralleli agli spigoli del cubo, figura 8.4, il punto \mathbf{x} si sposta lungo l'asse x_1 , dall'ascissa $x = 0$ all'ascissa $x = 1$.

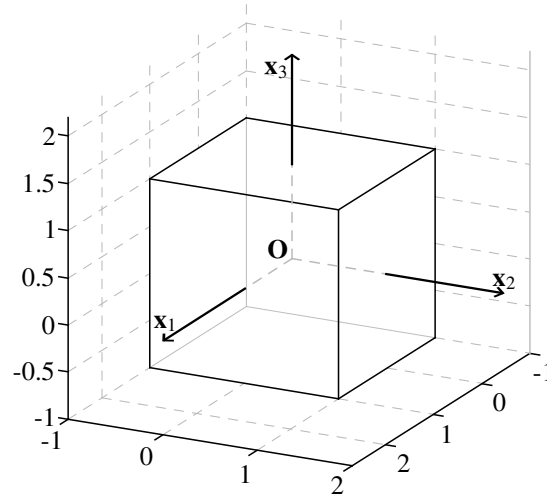


Figura 8.4: Inclusione cubica con altezza pari a 2.

Le due componenti del tensore di Eshelby, S_{1111} e S_{1212} sono riportate in diagrammi, insieme con le componenti omologhe riportate in Gao e Liu [2012].

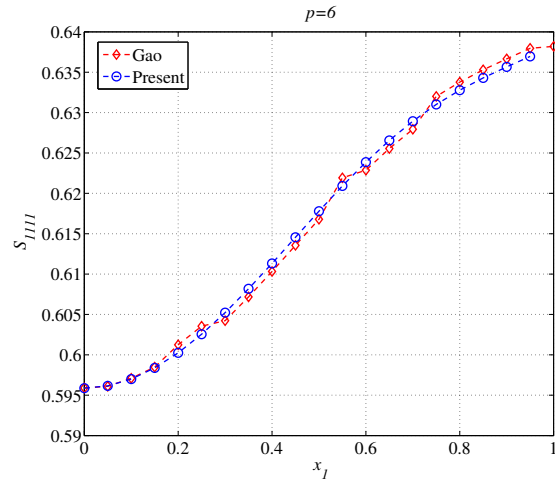


Figura 8.5: Variazione della componente S_{1111} lungo l'asse x_1 all'interno dell'inclusione cubica.

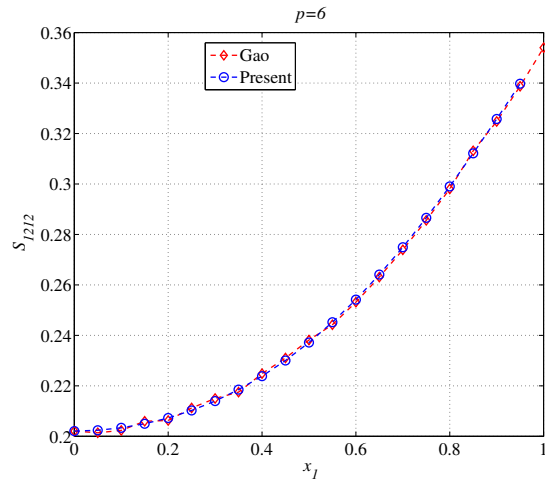


Figura 8.6: Variazione della componente S_{1212} lungo l'asse x_1 all'interno dell'inclusione cubica.

8.2.2 Caso dello ottaedro

Si consideri un ottaedro, cioè un solido costituito da $p=8$ lati, il cui spigolo ha lunghezza pari a 2; si calcolano le componenti del tensore \mathbb{S} al variare del punto \mathbf{x}

all'interno dell'inclusione, riportato in figura 8.7. Considerato il sistema di riferimento cartesiano coincidente con il baricentro dello ottaedro e con gli assi mostrati in figura 8.7, il punto \mathbf{x} si sposta lungo l'asse x_1 , dall'ascissa $x = 0$ all'ascissa $x = 1$.

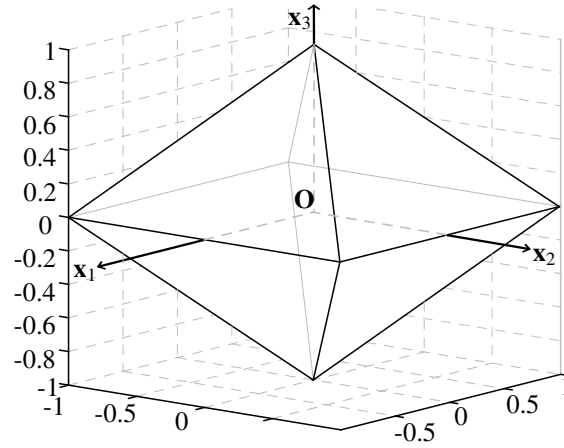


Figura 8.7: Inclusione ottaedrale, con spigolo pari a 2.

Il tensore \mathbb{S} è stato calcolato con due tecniche: nella prima è stato calcolato con le formule analitiche ricavate nel capitolo 6. Nella seconda tecnica, è stata impiegata una procedura mista numerico-analitica, cioè gli integrali estesi alla superficie (6.42)-(6.45) che compaiono nell'equazione (6.41) sono stati calcolati numericamente e poi sono stati assemblati con la stessa procedura degli integrali calcolati analiticamente. Il tensore \mathbb{S} è stato calcolato con le due tecniche e le componenti omologhe sono state diagrammate insieme alla componente presente in Gao e Liu [2012]: nella figura 8.8 sono diagrammate le componenti S_{1111} , mentre nella figura 8.9 sono diagrammate le componenti S_{1212} .

Dall'analisi dei diagrammi si evince che la procedura analitica fornisce risultati coincidenti con quelli numerici, mentre sono diversi da quelli presenti in letteratura.

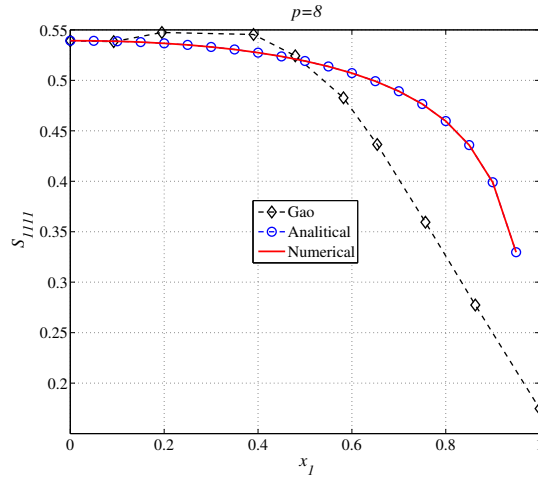


Figura 8.8: Variazione della componente S_{1111} lungo l'asse x_1 all'interno dell'inclusione ottaedrale.

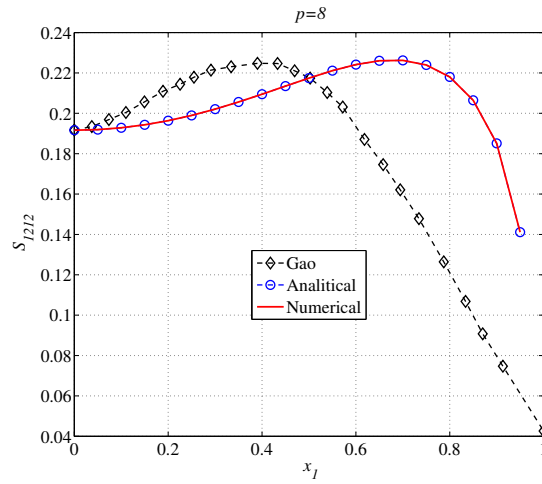


Figura 8.9: Variazione della componente S_{1212} lungo l'asse x_1 all'interno dell'inclusione ottaedrale.

8.2.3 Caso del tetradecaedro

Un tetradecaedro può essere generato troncando uniformemente i sei angoli di un ottaedro ed è conosciuto per essere l'unico poliedro che può contenere unità identiche

e minimizzare l'energia di superficie. Celle tetracaedrali sono frequentemente usate per rappresentare materiali espansi e nell'interpretazione dei compositi di fase.

Si consideri un tetradecaedro, cioè un solido costituito da $p=14$ lati, la cui altezza è pari a 2, si calcolino le componenti del tensore \mathbb{S} al variare del punto \mathbf{x} all'interno dell'inclusione, riportata in figura 8.10. Considerato il sistema di riferimento cartesiano coincidente con il baricentro del tetradecaedro e con gli assi mostrati in figura 8.10, il punto \mathbf{x} si sposta lungo l'asse x_1 , dall'ascissa $x = 0$ all'ascissa $x = 1$.

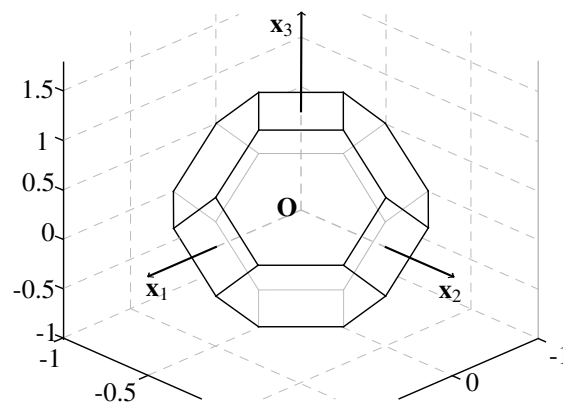


Figura 8.10: Inclusione tetradecaedrale, con altezza pari a 2.

Il tensore \mathbb{S} è stato calcolato con due tecniche: nella prima è stato calcolato con le formule analitiche ricavate nel capitolo 6. Nella seconda tecnica, è stata impiegata una procedura mista numerico-analitica, cioè gli integrali estesi alla superficie (6.42)-(6.45) che compaiono nell'equazione (6.41) sono stati calcolati numericamente e poi sono stati assemblati con la stessa procedura degli integrali calcolati analiticamente. Il tensore \mathbb{S} è stato calcolato con le due tecniche e le componenti omologhe sono state diagrammate insieme alla componente presente in Gao e Liu [2012]: nella figura 8.11 sono diagrammate le componenti S_{1111} , mentre nella figura 8.12 sono diagrammate le componenti S_{1212} .

Dall'analisi dei diagrammi si evince che la procedura analitica fornisce risultati coincidenti con quelli numerici, mentre sono diversi da quelli presenti in letteratura.

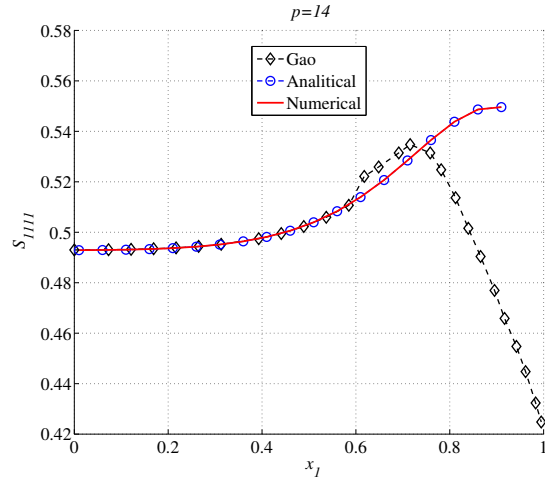


Figura 8.11: Variazione della componente S_{1111} lungo l'asse x_1 all'interno dell'inclusione tetradecaedrale.

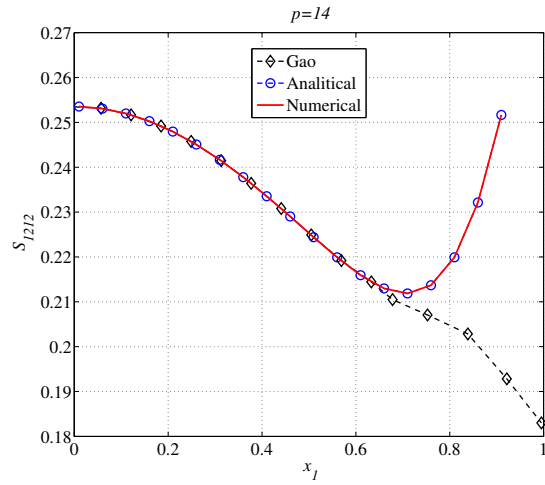


Figura 8.12: Variazione della componente S_{1212} lungo l'asse x_1 all'interno dell'inclusione tetradecaedrale.

Capitolo 9

Omogeneizzazione

9.1 Introduzione all'omogeneizzazione

I materiali presenti in natura possiedono una varietà di forme con una vasta gamma di proprietà. Tuttavia, un solo materiale non sempre è in grado di fornire il perfetto equilibrio tra le proprietà necessarie alla particolare applicazione. Sperimentalmente, si è visto che spesso le miscele di materiali forniscono dei vantaggi in termini di proprietà ricercate. È forse inevitabile che la scienza ingegneristica sia chiamata a spiegare le scoperte accidentali ed i risultati empirici. Aspetto ancora più importante è che la scienza ingegneristica è utilizzata per acquisire una comprensione fondamentale del comportamento dei sistemi di materiali eterogenei, in modo da poter raggiungere ulteriori miglioramenti. Infine, solo una disciplina rigorosa sul comportamento del materiale eterogeneo può fornire la chiave per ottimizzare l'utilizzo del materiale.

Per comprendere la necessità che spinge la ricerca verso ulteriori sviluppi, si possono considerare due esempi:

- il primo, riguarda i polimeri in forma omogenea. Nella maggior parte di casi, essi sono vitrei e fragili; da esperimenti condotti in laboratori chimici, si è visto che una dispersione uniforme delle sfere di gomma può migliorare notevolmente la sensibilità all'impatto del materiale. Allo scopo di fornire al materiale il com-

portamento voluto, nei polimeri vetrosi attualmente prodotti, vengono aggiunti degli agenti per l'indurimento della gomma.

- il secondo esempio è quello dei materiali compositi fibrorinforzati. Alcune fibre sono composte da materiali che non sono ancora disponibili in forma sfusa, o, se disponibili, nella forma di fibra presentano proprietà completamente diverse e migliori, rispetto a quelle possedute nella forma alla rinfusa. In entrambi i casi è stato constatato che mantenere il materiale in forma di fibra e tenere insieme le fibre con una fase di matrice uniforme, risulta essere di grande vantaggio. In forma composita il sistema presenta molte delle proprietà possedute dal materiale nella forma di unica fibra.

Questi esempi sono tipici dell'insieme di sistemi che possono essere considerati nelle combinazioni di materiali eterogenei. Va tenuto presente che le combinazioni di materiali che migliorano una particolare proprietà spesso comportano la degradazione di un'altra proprietà. Pertanto, devono essere considerate tutte le proprietà rilevanti e spesso devono essere fatti dei compromessi.

9.2 Il concetto dell'omogeneità equivalente

Ciascun materiale con il quale l'uomo si trova ad interagire, ad una scala sufficientemente piccola è eterogeneo. Per convincersi dell'alto grado di disordine e la variabilità che può verificarsi, basta mettersi alla scala di atomi e molecole. Se i materiali tecnici dovessero essere progettati a questo livello di osservazione, il compito sarebbe insormontabile. Per superare questa difficoltà, viene introdotta l'ipotesi del continuo. Questa ipotesi comporta un processo di media statistica per cui l'effettiva costituzione e la struttura del materiale sono idealizzate come quelle in cui il materiale viene considerato come un continuo. L'ipotesi del continuo implica l'esistenza di alcune misure associate alle proprietà che governano la deformabilità del mezzo. Queste proprietà riflettono le medie delle interazioni (necessariamente molto complesse) su scala molecolare o atomica. Una volta che è stata assunta l'esistenza del modello continuo, è indispensabile considerare il concetto di omogeneità. Per un mezzo omogeneo

ciascuna proprietà intrinseca che lo caratterizza, è considerata costante in tutti i punti del mezzo. La condizione di eterogeneità può verificarsi sia come variazione con la posizione della proprietà del continuo idealizzato, sia con una variazione improvvisa nelle proprietà attraverso l'interfaccia. In Christensen [2012] viene ampiamente discusso quest'ultimo caso, il quale coinvolge la combinazione di varie fasi che rimangono distinte. Da un punto di vista tecnologico, il tipo di eterogeneità che coinvolge fasi distinte è di gran lunga più importante rispetto all'eterogeneità naturale, che comporta un cambiamento continuo delle proprietà. In questo ambito si assume, che per ogni singola fase le condizioni di omogeneità ed isotropia prevalgono. Per procedere oltre, è necessario fare qualche premessa sulla scala della disomogeneità. Innanzitutto si assume che esista una dimensione caratteristica della disomogeneità: ad esempio, in un sistema di fibre, questa potrebbe essere la distanza media tra le fibre. Naturalmente, la dimensione caratteristica è un'idealizzazione lorda di una descrizione necessariamente statistica di un sistema effettivamente eterogeneo. A questo punto, vi è una scala di lunghezza mediante la quale le proprietà possono essere mediate in modo significativo.

La scala di lunghezza media, detta δ , deve essere di una dimensione molto più grande rispetto alla dimensione caratteristica della disomogeneità. Una verifica molto vantaggiosa per valutare l'esistenza della scala di lunghezza media, è che δ , sia più piccola rispetto alla dimensione caratteristica del corpo. In questa condizione il materiale può essere idealizzato come efficace omogeneo, e il problema dei carichi applicati al corpo può essere risolto utilizzando le proprietà medie associate, con l'impiego della scala di lunghezza δ . In tutte le ulteriori considerazioni si assume che la scala delle proprietà medie, esista e che sia significativa. Cioè, si presume che la scala della disomogeneità sia di ordini di grandezza inferiori, alla dimensione caratteristica del problema in esame, così che esista la dimensione intermedia, sulla quale le proprietà medie possono essere calcolate legittimamente. La condizione appena descritta è detta quella di *omogeneità effettiva o equivalente*. Altri termini di uso comune con la stessa implicazione sono quelli di *omogeneità macroscopica* e *omogeneità statistica*. L'alternativa all'introduzione del concetto di omogeneità equivalente, sarebbe tener conto in maniera esplicita di ogni regione separata di omogeneità, garantendo nelle analisi la continuità della sollecitazione e dello spostamento attraverso tutte le interfacce. Nei

tipici sistemi compositi con migliaia o milioni di regioni di particelle o fibre separate, quanto sopra sarebbe un compito impensabile. A questo punto, con l'ammissibilità dell'omogeneità equivalente, il problema fondamentale del comportamento di un materiale eterogeneo può essere posto e risolto. Il problema fondamentale è quello di utilizzare il processo di media per prevedere le proprietà efficaci del mezzo omogeneo idealizzato, in termini delle proprietà delle singole fasi e di alcune informazioni sulla geometria dell'interfaccia. Le proprietà efficaci risultanti sono quelle che possono essere impiegate nell'analisi di un corpo costituito dal materiale composito. La relazione tra le proprietà effettive e le proprietà delle singole fasi più l'analisi del problema strutturale di interesse, fornisce quindi i mezzi per ottimizzare le prestazioni strutturali variando le singole proprietà di fase o caratteristiche.

9.3 Proprietà effettive dei mezzi eterogenei

Nel discutere delle proprietà effettive dei materiali eterogenei, è necessario considerare almeno due scale differenti: una scala macroscopica ed una o più scale microscopiche relative alle eterogeneità. L'omogeneizzazione mira ad ottenere una descrizione omogeneizzata del mezzo, basata sul presupposto che un mezzo statisticamente omogeneo può essere rappresentato da un "Volume Elementare Rappresentativo (*RVE*)", oppure può definire un materiale con struttura periodica, il quale è rappresentato dalla ripetizione di una cella unitaria (*RUC*). Nonostante il fatto che la scelta o la modellazione del *RVE* o del *RUC* influisca sui risultati di omogeneizzazione, nell'ambito della meccanica, i ricercatori continuano a seguire le procedure generali, definite dai pionieri Hill [1963]; Avellaneda *e altri* [1989]. Per semplicità, si assumono due differenti scale, quella macroscopica x e quella microscopica y . In un punto macroscopico x , si considerano le variabili macroscopiche (omogeneizzate) σ^h (tensore di tensione), ϵ^h (tensore di deformazione), ρ^h (densità), etc. e le variabili microscopiche $\sigma(y)^h$ (tensore di tensione), $\epsilon(y)^h$ (tensore di deformazione), $\rho(y)^h$ (densità) etc., che sono impiegate nel *RVE* o nel *RUC*. In assenza di vuoti o di inclusioni rigide, i risultati classici di

funzioni debolmente convergenti implicano che

$$\sigma_{ij}^h = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma_{ij}^\varepsilon dy = \langle \sigma_{ij}^\varepsilon \rangle \quad (9.1)$$

e

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon_{ij}^\varepsilon dy = \langle \varepsilon_{ij}^\varepsilon \rangle \quad (9.2)$$

dove V è il volume del *RVE*.

Inoltre, quando si passa dalla struttura eterogenea al mezzo omogeneizzato, vengono mediate, tutte le funzioni meccaniche additive, quali la densità, l'energia interna, l'entropia e il grado di dispersione. Per semplicità, si presume, che a livello microscopico, il legame costitutivo incrementale assume la forma generale:

$$\dot{\sigma}_{ij}^\varepsilon = f_{ij}(\varepsilon_{ij}^\varepsilon, \sigma_{ij}^\varepsilon, \dots) \quad (9.3)$$

Le equazioni (9.1) e (9.2), dette leggi costitutive omogeneizzate costituiscono la procedura, con la quale ottenere la relazione tra le quantità omogeneizzate σ^h e ε^h (e possibilmente le loro derivate). Le grandezze meccaniche additive e l'equazione (9.3) sono termini di omogeneizzazione Suquet [1987]. La procedura inversa è detta localizzazione e permette di ricavare le quantità microscopiche da quelle macroscopiche. Questo problema è descritto da equazioni differenziali parziali del moto e dell'energia e dalle equazioni di compatibilità a livello microscopico, così come la legge costitutiva microscopica. Per riprodurre il più fedelmente possibile la condizione *in situ* del *RVE* o del *RUC* all'interno del materiale, sono stati utilizzati tre tipi di condizioni al contorno Suquet [1987]: sollecitazioni uniformi, deformazioni uniformi sul contorno del *RVE* e la ripetizione periodica della cella che implica condizioni di periodicità sul confine del *RUC*. La ragione di queste ipotesi è che una volta specificate le condizioni al contorno di cui sopra, l'equazione dei lavori virtuali, che svolge un ruolo importante nella formulazione variazionale del problema, assume una forma semplice. Più precisamente, in virtù del teorema di Green per ogni campo ammissibile σ_{ij}^{h*} e ε_{ij}^{h*} , si ha

$$\langle \sigma_{ij}^{\varepsilon*} \varepsilon_{ij}^{\varepsilon*} \rangle = \sigma_{ij}^{h*} \varepsilon_{ij}^{h*} \quad (9.4)$$

Questo utile risultato, detto “uguaglianza di macromogeneità di Hill” o “condizione di Hill”, è indipendente dalle leggi costitutive ma dipende esclusivamente dalle particolari condizioni al contorno descritte precedentemente. Una micromeccanica non limitata alla derivazione delle proprietà generali dei materiali con microstruttura, copre tutti i problemi dei materiali eterogenei: proprietà degli aggregati e metodi di media, solidi elastici con microcavità e microfessure, solidi elastici con micro-inclusioni, solidi con microstruttura periodica e solidi anelastici.

In questo contesto, la modellazione di materiali eterogenei e la caratterizzazione della microstruttura, sono importanti, sia dal punto di vista teorico che applicativo Markov [2000a]. L'omogeneizzazione se considerata come una sezione della micromeccanica, è un metodo per studiare i solidi (principalmente elastici) con microstruttura periodica Nemat-Nasser [1999a]. Questa si basa sull'espansione asintotica di tutte le funzioni di campo (vedi ad esempio l'articolo di review di Kalamkarov *e altri* [2009] con molti dettagli nell'applicazione di tecniche di omogeneizzazione asintotica all'analisi di materiali eterogenei e compositi a parete sottile e le loro proprietà efficaci) e non è adatto per le equazioni non lineari. Nel lavoro di Charalambakis [2010] sono presentate le tecniche di omogeneizzazione applicate ad una vasta gamma di materiali e strutture sotto diverse condizioni costitutive e di carico.

Le simulazioni di materiali eterogenei basate sulla micromeccanica svolgono un ruolo importante nello sviluppo di nuovi sistemi materiali in quanto consentono:

1. l'identificazione e la selezione dei materiali appropriati per determinate applicazioni;
2. lo sviluppo di materiali con importanza tecnologica, esibendo le proprietà termomeccaniche e fisiche desiderate;
3. la progettazione ottimale di elementi strutturali complessi, nel contesto dell'analisi a scala multipla.

L'omogeneizzazione è combinata con la micromeccanica per esprimere chiaramente: il grado di influenza delle proprietà locali, la disposizione dei componenti sul comportamento macroscopico del materiale e il comportamento di strutture complesse realizzate

con questo materiale. Di conseguenza, si può accelerare il ciclo per lo sviluppo di un sistema materiale per una specifica applicazione Pindera *e altri* [2009]. Inoltre, per motivi ingegneristici, l'omogeneizzazione deve essere completata da un esatto studio della deformazione, sia a livello microscopico che a livello macroscopico, in modo che le informazioni fornite siano legate non solo con i valori omogeneizzati di sforzo, ma anche con tutte le possibili modalità di guasto della struttura (in Sun *e altri* [2009], una disomogeneità a livello microstrutturale funge da imperfezione iniziale, innescando l'instabilità in forma di localizzazione della deformazione). Un modello micromeccanico affidabile deve possedere almeno, le seguenti caratteristiche Pindera *e altri* [2009]:

1. la capacità di incorporare elementi multifase e microstrutture complesse;
2. la possibilità di adottare relazioni costitutive elastiche e/o anelastiche a livello locale delle fasi;
3. la capacità di fornire in forma chiusa, equazioni costitutive per un set di carichi multiassiali termomeccanici.

È evidente che la necessità di parametrizzazione della risposta delle fasi *in situ*, richiede un'elevata efficienza computazionale. Infine, un'interessante applicazione della micro-meccanica è la costruzione su multiscala delle equazioni costitutive macroscopiche (effettive), le quali riflettono i meccanismi di deformazione nelle scale di ordini inferiori. La formulazione micromeccanica di queste leggi costitutive, richiede tutte le caratteristiche enunciate precedentemente, in particolare, se la tecnica applicata è inserita in un algoritmo di progettazione ottimale, offrirà le migliori proprietà termomeccaniche solo sotto specifici vincoli Pindera *e altri* [2009].

L'omogeneizzazione teorica fornisce una definizione rigorosa del processo di omogeneizzazione e delle equazioni omogeneizzate. Essa consiste nell'impostare il problema come una sequenza di equazioni che descrivono il materiale eterogeneo quando le eterogeneità, la cui dimensione tipica è caratterizzata da un parametro ε diventano sempre più piccole. Questo metodo, presuppone che il problema matematico, per un fissato ε , sia ben definito o almeno che sia in grado di dimostrare l'esistenza di (alme-

no) una soluzione del problema e di valutarne a priori il valore (indipendentemente da ε) in uno spazio funzionale. Il problema è poi passare al limite con ε che tende a zero. Questo compito è difficile, dato che sono coinvolte le topologie deboli e dal momento che il passaggio al limite del problema, è un processo non lineare (anche se il problema è lineare) quando sono interessati sia la soluzione che i coefficienti.

I lavori pionieristici di Lions [1969]; Duvaut e Lions [1972], hanno offerto gli strumenti matematici per l'applicazione di tecniche di analisi funzionale in problemi di meccanica dei continui. Nel suo lavoro, Duvaut [1976] ha presentato la soluzione limite per il modello di elasticità lineare periodica e la forma esplicita dei coefficienti efficaci. Una prima importante conclusione è che, in generale, l'isotropia dei costituenti non si conserva sotto l'omogeneizzazione. Ancora peggio, se i coefficienti dipendono unicamente da una variabile (come, ad esempio, nei materiali stratificati), omogeneizzare l'isotropia è impossibile. Inoltre, Duvaut [1976], presenta la soluzione limite dall'espansione asintotica ed i primi correttivi dello spostamento, nonché l'omogeneizzazione di una lastra sottile inflessa. L'interesse dei matematici nelle applicazioni ingegneristiche è stato la base di importanti opere nel corso degli anni. Per citare alcune opere in questa direzione ricordiamo Babuška [1976a]; Sánchez-Palencia [1980]; Bensoussan e altri [2011]. Nel frattempo Tartar [1977] e Murat e Tartar [1997] presentavano la tecnica di compattezza compensata, la tecnica più importante nei problemi di omogeneizzazione deterministici. Ball [1976] ha presentato la teoria dell'esistenza completa in elasticità non lineare. Negli ultimi anni, Murat, Tartar, Francfort, e Suquet hanno pubblicato opere fondamentali sulla omogeneizzazione dei processi meccanici non lineari: plasticità Suquet [1982, 1983, 1987], termoelasticità lineare Francfort [1983], viscoelasticità lineare Francfort [1983], equazioni alle derivate parziali (PDEs) Tartar [1984], elasticità lineare Francfort e Murat [1986], termoviscoelasticità Francfort e Suquet [1986].

Nei primi anni '80, la principale estensione della micromeccanica di Hill [1963, 1967, 1965a] fu rivolta alle tecniche di omogeneizzazione dei compositi. In questo ambito, il concetto base di volume rappresentativo (*RVE*) e le appropriate condizioni al contorno, soddisfavano il principio virtuale tra i mezzi eterogenei ed effettivi. Inoltre, furono derivati i limiti ottimali e rigorose teorie di progettazione.

Tuttavia, la necessità di considerare un comportamento costitutivo, che non derivasse da un singolo potenziale e, più in generale, vecchi problemi con legami costitutivi non lineari, imponeva la ricerca di altre soluzioni. Inoltre, il concetto di *RVE* non era compatibile con approcci computazionali che coinvolgevano scale di lunghezza interna. Un eccellente studio sulla micromeccanica continua dei materiali elastici lineari, è riportato in Zaoui [2002].

Nei primi anni '90, sono stati sviluppati dei nuovi effetti indotti dalla omogeneizzazione, come la stabilità dell'omogeneizzazione, introdotta in precedenza da Tartar, o la perdita della convessità dell'energia omogeneizzata o la commutabilità tra omogeneizzazione e linearizzazione Geymonat *e altri* [1993] e sono stati continuamente derivati nuovi risultati nei settori dell'elasticità non lineare e della plasticità Geymonat *e altri* [1993]; Castañeda [1996]. Gli strumenti matematici dell'omogeneizzazione sono riportati nel paragrafo 9.12.

Da un punto di vista meno matematico e più meccanico, l'omogeneizzazione mira a fornire materiali efficaci, passando dalla deformazione microscopica (di tipo oscillante) a quella macroscopica (variabile lentamente). Questo metodo può essere utilizzato per “personalizzare” nuovi materiali con delle proprietà migliorate, ottenute facendo la media di semplici fasi (anche se molto eterogenee). Spesso è stato descritto nella letteratura matematica e meccanica e qui darne un elenco completo sarebbe impossibile: si ricorda Suquet [1982]; Francfort [1983]; Francfort *e altri* [1983b]; Hashin [1983]; Suquet [1983]; Francfort e Suquet [1986]; Pindera *e altri* [2009]; Nie e Batra [2010a]. In particolare, il concetto di “continuo omogeneo equivalente” Maugin [1992] è stato usato per prevedere la risposta macroscopica di analisi microscopiche sostituendo il mezzo macroscopico eterogeneo, rappresentato dal *RVE*, con un modello continuo (vedi anche Van der Sluis *e altri* [1999]; Love e Batra [2006]). La modellazione delle equazioni costitutive di materiali in resina epossidica, in fibre di carbonio, e di nanotubi in carbonio, si combina con nuovi risultati sperimentali per migliorarne il comportamento Chatzigeorgiou e Lagoudas [2009]; Lagoudas *e altri* [2009]: ad esempio l'aggiunta dei materiali a memoria di forma, fornisce un maggiore assorbimento di energia e la reversibilità di grandi deformazioni. I metodi di omogeneizzazione applicati a questi casi sono i metodi multiscala (a livello molecolare, di microstruttura e di macrostruttura) e

si basano su metodi di micromeccanica classica e omogeneizzazione asintotica, discussa nel paragrafo 9.4, presenta il contributo di omogeneizzazione alla caratterizzazione meccanica dei materiali.

Tra le applicazioni più importanti delle tecniche di omogeneizzazione, ci sono i metodi di ottimizzazione per la progettazione di strutture complesse sotto vincoli differenti, come la rigidità, il peso, l'assorbimento di energia, la tensione efficace, Allaire [1992]; Allaire *e altri* [1997, 2004]; Francfort e Murat [2009], etc. Nel paragrafo 9.5 sono presenti ulteriori informazioni su questo problema. Metodi computazionali basati sull'omogeneizzazione matematica sono stati applicati a vari settori della meccanica dei solidi: ad esempio, Fish *e altri* [1997] ha proposto un approccio di omogeneizzazione teorico-computazionale per composti plastici usando sviluppi asintotici in doppia scala e autodeformazioni: in Moulinec e Suquet [2003a] viene calcolata la deformazione tra fasi eterogenee. Recentemente sono state proposte tecniche computazionali basate sugli elementi finiti computazionali Ghosh *e altri* [1995], su accoppiamenti espliciti delle risposte microstrutturali con quelle macroscopiche Aboudi *e altri* [1999] e su approcci teorici emergenti Cavalcante *e altri* [2008]; Stefanou *e altri* [2008]. Recenti metodi computazionali usano localmente la soluzione elastica applicandola al problema della cella unitaria. Il problema esterno è indagato applicando il principio variazionale, che ripristina la natura non separabile della cella elementare. Questi nuovi metodi sono competitivi con il metodo degli elementi finiti. Infine, le tecniche di simulazione al computer, come ad esempio la plasticità dinamica multiscala, Shehadeh *e altri* [2005] unisce due scale di lunghezza, la nanomicroscala e la scala del continuo, sicché in un modello elastoviscoplastico risultano accoppiate le dislocazioni dinamiche discrete con le analisi degli elementi finiti. I recenti metodi computazionali più importanti sono presentati nel paragrafo 9.6.

Un'altra interessante applicazione è l'omogeneizzazione associata al comportamento meccanico di particolari componenti fibrorinforzati sotto carichi dinamici Kim [1996]; Smyshlyaev [2009]. La loro importanza è notevole, soprattutto se queste tecniche sono combinate con metodi che contengono informazioni sulla struttura e sull'integrità del materiale. I metodi da impiegare variano a seconda della frazione volumetrica delle inclusioni: essi possono essere sia la omogeneizzazione asintotica che la diffu-

sione multipla delle onde che si propagano nel mezzo. Una descrizione più dettagliata è riportata nel paragrafo 9.7.

Nel contesto delle teorie del gradiente di deformazione Cosserat e Cosserat [1909], hanno sviluppato nuove tecniche di omogeneizzazione basate sull'espansione differenziale generalizzata Pasternak e M. [2005], con risultati migliori rispetto ai metodi computazionali puri (cioè costruiti con l'omogeneizzazione Mühlhaus *e altri* [1997]; Forest [1998]). Di particolare interesse sono le applicazioni sulla propagazione delle onde in materiali stratificati e sulla riflessione in strutture periodiche Georgiadis *e altri* [2000, 2004]. La biomeccanica e, più in particolare, il campo dello studio delle proprietà meccaniche dei diversi tessuti, può essere notevolmente aiutata dalla teoria dell'omogeneizzazione basata sul gradiente di deformazione Doyle *e altri* [2009]; Eftaxiopoulos e Atkinson [2005]. Le eterogeneità dei tessuti possono essere simulate con successo nell'ambito della teoria continua di Cosserat. Infine, le teorie di ordine superiore del gradiente di deformazione possono essere applicate nei casi di strutture eterogenee di importanza culturale, come murature e colonne antiche. Infatti, l'omogeneizzazione dà risultati fruttuosi sul comportamento meccanico dei monumenti Mühlhaus *e altri* [1997]; Stefanou *e altri* [2008]. Nel paragrafo 9.7 questo problema viene discusso più nel dettaglio.

In sismologia, recenti metodologie si basano sullo studio della propagazione delle onde in materiali eterogenei complessi con i relativi problemi di imaging. Nella letteratura recente sono disponibili soluzioni approssimative delle equazioni di Wigner, che costituiscono gli strumenti matematici di base per lo studio di questi problemi. A causa della eterogeneità, l'omogeneizzazione è difficile in quanto i metodi puramente stocastici o puramente deterministici non sono efficienti. Solo di recente è stata sviluppata una metodologia di imaging coerente, chiamata interferometria coerente Borcea *e altri* [2002]. Questo metodo può affrontare il problema dell'imaging nell'inversione sismica senza conoscere l'esatta composizione del terreno: gli unici dati necessari sono le sole proprietà statistiche delle eterogeneità. Si prevede che la relativa esperienza sui fenomeni di interazione tra sorgente sismica e sensore, aumenterà l'estensione matematica e numerica di questa metodologia. Alcuni dettagli su queste tecniche sono riportati nel paragrafo 9.9.

Molto recentemente, l'omogeneizzazione, è stata arricchita da nuove tecniche, basate sulla teoria cinetica Hwang e Tzavaras [2002] che è in grado di superare la debolezza della compattezza compensata per catturare le oscillazioni dei sistemi iperbolici come processi dinamici Jabin e Tzavaras [2009]. Questa teoria permette di raccogliere informazioni sulla propagazione delle oscillazioni nei mezzi elastici non lineari utilizzando le equazioni di evoluzione di alcune funzioni "cinetiche". Si ritiene che ci sia il potenziale per un ulteriore sviluppo di queste tecniche e la loro interazione con il più ampio campo della propagazione in problemi non lineari. Alcune di queste idee sono riportate nel paragrafo 9.10

9.4 Caratterizzazione dei materiali eterogenei e delle strutture

Il primo obiettivo della ricerca è la caratterizzazione meccanica dei materiali eterogenei elastici e delle strutture. I coefficienti elastici efficaci possono, naturalmente, essere definiti risolvendo il corrispondente problema di equazioni alle derivate parziali. Tuttavia, ci sono alcune eccezioni, come ad esempio, i casi legati alla doppia trasformazione nei mezzi 2D con simmetrie dei materiali. Le traduzioni possono anche essere utili per prevedere coefficienti efficaci. Traduzioni di questo tipo, sono in relazione con Lagrangiane quadratiche per traduzioni autoaggiunte (compattezza compensata) o, più in generale con funzioni bilineari debolmente continue, così come l'energia di deformazione elastica. Per tutte le trasformazioni (di omogeneità e di dualità), si può iniziare da una soluzione nota e ruotarla di 90° , ottenendo nuove soluzioni di "deformazione" o di "stress". Queste nuove soluzioni presentano l'importante proprietà della stabilità dell'omogeneizzazione, cioè sono collegate tra loro da equazioni costitutive locali, le quali sono stabili nell'omogeneizzazione, a condizione che la trasformazione sia basata su funzioni bilineari debolmente continue. In questo contesto, è importante studiare i compositi laminati bifase in due o in tre dimensioni, e semplice, doppio o triplice ordine di laminazione Tartar [1976]; Francfort e Murat [1986]; Avellaneda *e altri* [1989]; Bakhvalov e Panasenko [1989]; Maugin [1992]; Geymonat *e altri* [1993]; Forest e Sab

[1998]; Grabovsky *e altri* [2000]. L'ordine di laminazione è il numero minimo delle differenti scale di lunghezza, necessarie per costruire il composito. Vale la pena notare che, nel caso di materiali bifase se la differenza dei due tensori elastici delle fasi $C_1 - C_2$ è definita positiva, questi compositi sono compositi più "duri", tra tutte le possibili forme di compositi bifasici, con le stesse frazioni di volume dei materiali Avellaneda [1987]. Sfortunatamente, il set dei tensori equivalenti costruiti per miscele di due materiali elastici, definite in proporzioni di volumi, è sconosciuto, benché il corrispondente problema di conduzione elettrica sia noto. Per raggiungere questo obiettivo, si può usare la teoria degli operatori Γ per decomporre lo spazio funzionale L^2 in tre sottospazi ortogonali, corrispondenti, rispettivamente, ai campi uniformi di tensione, e di deformazione. I tre operatori Γ sono le proiezioni su questi sottospazi Milton [2002]. Inoltre, si possono utilizzare le disuguaglianze variazionali ed i principi necessari per determinare le condizioni necessarie e sufficienti, soddisfatte dalle caratteristiche delle fasi del materiale in modo che la deformazione di energia sia debolmente continua. Uno degli obiettivi della ricerca è rivolta ad estendere questa classificazione sistematica dei materiali compositi, a selezionati compositi elastici non lineari. Si prevede che questa estensione può essere fatta sulla base dei principi variazionali invece che delle relazioni costitutive. L'idea fondamentale è l'utilizzo delle trasformazioni di Legendre nello stesso ruolo della matrice di inversione dell'elasticità lineare Tartar [1977]; Castañeda e Suquet [1998]. Vale la pena ricordare che sono già disponibili le condizioni sufficienti, per relazioni esatte tra tensori efficaci, relativi ad una struttura arbitraria del composito (quindi non solo per laminati rivestiti) Grabovsky *e altri* [2000].

Nello stesso contesto, un secondo obiettivo della relativa ricerca è la caratterizzazione termomeccanica dei materiali eterogenei anelastici. Questo è un compito difficile poiché, in molti casi (anche in quelli lineari), le ipotesi riguardanti le proprietà dei costituenti (ad esempio, l'isotropia elastica o plastica), non sono più valide per il materiale efficace Chatzigeorgiou *e altri* [2009]. Inoltre, le leggi costitutive non lineari non conservano la loro tipologia nel mezzo efficace, (per esempio, leggi esponenziali per materiali che presentano hardening o softening). Ciò è particolarmente sgradevole, poiché, molte leggi costitutive empiriche, sono state dimostrate nella letteratura analitica, computazionale e sperimentale, e sono utilizzate per la caratterizzazione meccanica

di questi costituenti, confrontando i valori dei loro coefficienti, con risultati sperimentali. Inoltre, l'effetto delle condizioni iniziali e al contorno, sulle proprietà efficaci è fondamentale, e rende ogni problema non lineare uno speciale caso di studio con particolare interesse. Più specificamente, in problemi termoviscosi anelastici, alcune condizioni iniziali rientrano nei coefficienti effettivi (temperatura iniziale e/o deformazione iniziale). Per quanto riguarda le condizioni al contorno e le forze inerziali, nella termoviscoplasticità unidimensionale, le proprietà efficaci rientrano solo nel caso anisotermale Charalambakis e Murat [2006, 2010]. Tuttavia, ci sono diversi modi per raggruppare i comportamenti efficaci dei differenti tipi di materiali (elastici, elastoplastici, viscoplastici, termoviscoplastici, etc.), per formulare condizioni necessarie a garantire la stabilità dell'omogeneizzazione e per definire le equazioni che descrivono il problema e più specificatamente la legge costitutiva. Infine, nella elastoplasticità incrementale la decomposizione della deformazione in parti elastiche e plastiche non è più stabile nell'omogeneizzazione, e nell'espressione costitutiva deve essere considerata una effettiva correzione del "vettore" sollecitazione incrementale Chatzigeorgiou e altri [2009].

Casi particolari, quali la determinazione del carico di snervamento delle strutture composite, la simulazione dei danni di vecchie murature, la simulazione Cosserat degli effetti di scala in policristalli e materiali multifase, l'omogeneizzazione delle strutture sandwich, l'interazione tra omogeneizzazione ed il gradiente di elasticità e l'omogeneizzazione dei nanocristalli, sono di grande importanza tecnologica e sono analizzati nel quadro della relativa ricerca. Compositi realizzati in resina epossidica con nanotubi di carbonio e fibre di carbonio sono popolari nell'ingegneria aerospaziale, nell'ingegneria meccanica, nella costruzione dell'hardware dei computer, ecc. I nanotubi di carbonio mostrano eccellenti proprietà elettriche e termomeccaniche (migliori delle corrispondenti proprietà relative alla semplice resina epossidica). Aggiungendo più componenti selezionati, ad esempio, leghe a memoria di forma Lagoudas e altri [2009], si ottengono ulteriori proprietà desiderate (grandi deformazioni reversibili, migliore assorbimento di energia). Per tali materiali, la modellazione e l'omogeneizzazione si basano su modelli multiscala. Partendo dalla nanostruttura, la scala atomica è simulata con l'aiuto dell'analisi dinamica molecolare, conseguente alla caratterizzazione

del comportamento di nanotubi immersi nella matrice di carbonio (forza interfacciale, crepe, e pull-up).

Questa informazione va dall'analisi dinamica molecolare al livello di microstruttura (mesoscala), dove vengono applicate opportune tecniche di omogeneizzazione per completare la caratterizzazione macroscopica di questi materiali per quanto riguarda il loro comportamento meccanico, termico ed elettrico. Le tecniche di omogeneizzazione combinano metodi classici (metodo del cilindro composito, metodo Mori-Tanaka, metodo Self-Consistent) con il metodo dell'espansione asintotica e tiene conto della risposta elastica e/o anelastica dei componenti. Sulla base di questi metodi, per la progettazione ottimale di questi materiali multifunzionali sia dal punto di vista termomeccanico che economico, possono essere applicate delle analisi parametriche. In parallelo, i metodi di omogeneizzazione emergenti, costituiscono una base importante per l'omogeneizzazione di nuovi materiali compositi. E' previsto un modello di omogeneizzazione coerente per i materiali a base di nanotubi di carbonio e matrice epossidica, il quale è convalidato dal loro comportamento sperimentale.

9.5 Progetto dei materiali eterogenei e delle strutture

Il progetto ottimale dei materiali eterogenei e delle strutture è di grandissima importanza. La relativa teoria matematica (compattezza compensata e principi variazionali) permette di determinare i limiti delle proprietà efficaci dei compositi, utilizzando l'energia elastica dei mezzi eterogenei e del materiale efficace. Per quanto riguarda i materiali, la ricerca si propone di applicare l'omogeneizzazione inversa per determinare materiali con ideali proprietà elastiche prefissate Cherkaev [2001]. Per quanto riguarda le strutture, la ricerca si propone di applicare le forme o le topologie ottimizzate, con le quali le strutture presentano un comportamento ideale rispetto alle sollecitazioni o alle deformazioni o all'assorbimento di energia o alla geometria auspicata, sotto diversi carichi.

Bendsøe e Kikuchi [1988] hanno proposto una forma ottimale degli elementi strutturali, derivanti dalla computazione della distribuzione ottimale nello spazio, di un materiale anisotropo che è assemblato introducendo in un dato mezzo omogeneo dei fori,

distribuiti periodicamente nell'estremo inferiore. Il composito è caratterizzato da una cella unitaria costituita dal materiale iniziale con uno o più fori. Le proprietà efficaci di questo materiale disomogeneo sono calcolate utilizzando l'omogeneizzazione. Questo fornisce una relazione funzionale tra la densità del materiale (cioè la dimensione dei fori) e le proprietà effettive. Quindi, la distribuzione ottimale, di questo composto nel dominio di riferimento, è trattata come un problema di dimensionamento rispetto alla densità. Infine, la soluzione ottimale consente la definizione della forma. Vale la pena notare che Bendsøe e Kikuchi [1988] hanno suggerito che è meglio non sostituire i fori con materiali soft, quando l'obiettivo è quello di determinare il tensore elastico omogeneizzato per materiali contenenti vuoti in microscala. Inoltre per l'uso dell'omogeneizzazione della forma, i coefficienti elastici omogeneizzati, devono essere ottenuti per continuità, variando la dimensione dei vuoti nella cella, sicché la densità può essere progettata come una variabile continua, per l'ottimale distribuzione del materiale. Nell'ottica di ottimizzazione della forma, introdotta da Bendsøe e Kikuchi [1988]; Nishiwaki *e altri* [1998], Allaire *e altri* [1997, 2004], Sigmund e Torquato [1999] e Allaire [2002], gli autori cercano le soluzioni minimizzando la somma della cedevolezza elastica ed il peso di una struttura sotto un carico noto. Questo problema è noto come un problema mal posto: metodi classici basati sul movimento della frontiera non possono cogliere la possibile forma di complessità topologica, poiché le ipotesi di scorrevolezza ai bordi, non prevedono l'esistenza di fori, anche se è noto che, la creazione di fori, potrebbe migliorare considerevolmente la capacità di una candidata forma ottimale. Se riferiti a problemi di ottimizzazione, l'introduzione dei vuoti di forme e dimensioni arbitrarie, diventano tuttavia, soluzioni puramente matematiche, senza interesse pratico. Ad esempio per quanto riguarda la minimizzazione della cedevolezza, utilizzando il peso come vincolo, la soluzione è la funzione caratteristica della forma. È ben noto dai lavori pionieristici di Murat e Tartar che in una classe più ampia di progetti ammissibili, può essere introdotta una miscela di vuoti sottili e significativi, a una scala molto più piccola della griglia di calcolo. Come soluzione progettuale ammissibile, viene conseguentemente introdotta, una procedura di rilassamento dei compositi con microfori. Ricordando l'esempio della cedevolezza minima, dalla omogeneizzazione dei materiali vista nel paragrafo 9.4, è noto che la soluzione corrisponde ai materiali

sequenziali laminati. In questo modo, il problema non è indeterminato, contrariamente al caso della miscela arbitraria di due costituenti elastici. Per affrontare il problema dei fori, è effettuata una procedura di rilassamento applicando l'omogeneizzazione e opportuni limiti nei compositi. Allaire ha esteso questa procedura al caso $3D$, mediante un teorema di rilassamento e un algoritmo numerico per eseguire progetti ottimali, completati da una tecnica di recupero dei compositi nella forma finale. Questo algoritmo essendo indifferente al numero di fori, può essere caratterizzato come un algoritmo di ottimizzazione topologia.

Altrettanto importante, è il problema di ottimizzazione per la progettazione dello stress minimo mediante l'omogeneizzazione, riconsiderando la sottoclasse di compositi laminati sequenziali di Tartar per i quali le proprietà effettive sono completamente note. I metodi numerici del progetto sono estesi ai metodi di omogeneizzazione di altre funzioni obiettivo, come, in questo caso, al minimo della norma L^2 delle sollecitazioni. A causa delle eterogeneità microscopiche, appaiono concentrazioni di tensione con conseguenti, grandi differenze tra la distribuzione delle tensioni e la corrispondente sollecitazione macroscopica "media". Così, un appropriato termine ponderato, dipendente dalle eterogeneità, viene introdotto nella norma dello sforzo Allaire e altri [2004]. Questo termine di amplificazione viene calcolato dai cosiddetti "termini di correzione". Questo compito è molto difficile per microstrutture generali. Tuttavia, per i materiali laminati, questi termini sono disponibili in formule esplicite Maugin [1992].

9.6 Modellazione micromeccanica di strutture complesse

I primi modelli micromeccanici erano rappresentazioni piuttosto semplici di materiali eterogenei ed il loro trattamento era quasi sempre analitico. I modelli contemporanei sono più appropriati per soddisfare bisogni emergenti di una tecnologia che considera le strutture policristalline dei metalli, le pietre porose, i materiali da costruzione, le leghe a memoria di forma, i tessuti ed i compositi rinforzati da fibre vetro-carbonio. Così questi modelli corrispondono a strutture molto complesse e portano a

considerazioni estremamente complicate, che richiedono dettagliati approcci numerici o semi-analitici. Queste considerazioni sono basate sulle simulazioni dei campi locali in particolari regioni, nei quali la microstruttura è discretizzata ai fini dell'analisi. La discretizzazione geometrica precedente, conduce ad un grande sistema di equazioni algebriche, rispetto ai coefficienti incogniti negli approssimativi campi locali, necessario a risolvere il campo differenziale di equazioni lineari o variazionali. Il progresso nello sviluppo della tecnologia computazionale, portando allo sviluppo di metodi numerici, come il metodo degli elementi finiti, il metodo alle differenze finite, e il metodo dei volumi finiti, ha creato un nuovo interesse nelle tecniche analitiche.

Problemi eterogenei di elasticità, possono essere rivisti come sistemi di equazioni algebriche, rispetto ai coefficienti che rappresentano i campi e che soddisfano esattamente le equazioni locali. Questo metodo di calcolo nella micromeccanica, chiamato micromeccanica parametrica del volume finito Chen *e altri* [2005]; Cavalcante *e altri* [2007]; Khatam e Pindera [2009]; Pindera *e altri* [2009], è molto promettente ma deve affrontare grandi difficoltà nell'applicazione delle condizioni al contorno, richieste in un volume secondario, la cui risposta è rappresentativa di tutto il materiale. Tuttavia, questo metodo può essere applicato con elevata precisione in situazioni che richiedono stime accurate sia della risposta microscopica che macroscopica dei materiali elastici, anelastici e delle strutture. La combinazione di questo approccio, con l'omogeneizzazione localmente esatta, può essere affidabile e facilmente applicabile, grazie al modo semplice di introdurre i dati, alla sua efficienza, al costo computazionale relativamente modesto, e alla rapida convergenza della soluzione.

9.7 Omogeneizzazione di compositi con effetto microstruttura e proprietà dinamiche effettive

Molto lavoro di ricerca è dedicato ai problemi dinamici, sulla base dell'omogeneizzazione Chen e Fish [2001]; Doyle *e altri* [2009]; Fang *e altri* [2009], sull'omogeneizzazione di Cosserat Forest [1998]; Forest e Sab [1998], sulla propagazione delle onde in materiali fibrorinforzati Kim [1996]; Parnell e Abrahams [2008] e sull'omogeneiz-

zazione elastica del gradiente di deformazione Smyshlyaev e Fleck [1994]; Peerlings e Fleck [2004]; Smyshlyaev [2009]. Recentemente, Polyzos ha considerato i problemi dinamici dei particolati, dei fibrorinforzati, dei compositi granulari con periodicità e delle inclusioni casuali Tsinopoulos *e altri* [2000]; Verbis *e altri* [2002]; Polyzos *e altri* [2003]; Aggelis *e altri* [2004]; Polyzos *e altri* [2007]. La simulazione di un materiale composito come un mezzo omogeneo e la determinazione delle effettive proprietà elastiche e dei coefficienti inerziali, mediante le tecniche di omogeneizzazione, è uno dei passi più importanti per l'analisi ed il progetto di questi materiali nonché per il rilevamento di difetti in esso contenuti, mediante test non distruttivi. In letteratura ci sono molte opere in considerazione alle tecniche di omogeneizzazione sia per i compositi fibrorinforzati che granulari. La maggior parte di loro sono relative al calcolo dei coefficienti elastici effettivi, con carico statico.

Anche se la ragione di ciò è evidente, il progetto e gli esperimenti sotto condizioni di carico statico sono molto più semplici rispetto agli esperimenti corrispondenti, sotto un carico dinamico. La valutazione computazionale delle proprietà dinamiche di un materiale composito è molto importante, poiché, sotto carico armonico, le proprietà di questo materiale dipendono dalla frequenza (tensore elastico effettivo ed il coefficiente di smorzamento), pertanto, è necessario acquisire molteplici informazioni sia sulla struttura che sull'integrità strutturale del composito.

Ci sono due categorie di tecniche per l'omogeneizzazione nei problemi dinamici:

- la prima categoria impiega tecniche basate sull'espansione asintotica del campo degli spostamenti rispetto al volume rappresentativo del composito Sánchez-Palencia [1980]; Bakhvalov e Panasenko [1989]; Chen e Fish [2001]; Mazur-Śniady *e altri* [2004]; Parnell e Abrahams [2008]; Smyshlyaev [2009];
- la seconda categoria impiega tecniche basate sull'analisi della dispersione multipla causata dalla propagazione delle onde piane all'interno del composito Yang e Mal [1994]; Kim [1996]; Aggelis *e altri* [2004]; Doyle *e altri* [2009]; Fang *e altri* [2009].

Per quanto riguarda gli svantaggi dell'omogeneizzazione asintotica, possiamo citare la sua complessità matematica, la restrizione a materiali con microstrutture periodiche

e l'assunzione che l'elemento di volume rappresentativo sia molto più piccolo della lunghezza d'onda del carico dinamico. La seconda categoria di tecniche di omogeneizzazione sebbene più adatta ai compositi con inclusioni distribuite casualmente, non è appropriata per materiali con inclusioni a elevata frazione volumetrica. Tuttavia, il problema più grave delle tecniche appena menzionate è che non possono catturare gli effetti delle dimensioni della microstruttura. In altre parole, esse prevedono gli stessi coefficienti effettivi, per tutti i compositi aventi la stessa frazione volumetrica e diverse dimensioni delle inclusioni. Questo problema può essere affrontato considerando teorie generalizzate di elasticità Cosserat e Cosserat [1909] (elevato ordine del gradiente di elasticità Mindlin [1964], elasticità micropolare Eringen [1965] ed elasticità non locale Eringen [2002]). Tutte queste teorie assumono che gli effetti microstrutturali nelle equazioni costitutive e nelle equazioni alle derivate parziali che le disciplinano, possono essere espressi in termini di variabili interne, che conciliano la microstruttura al comportamento macroscopico. Le teorie generalizzate hanno già molte applicazioni in problemi di omogeneizzazione asintotica degli effetti microscopici Smyshlyaev e Fleck [1994]; Ghosh *e altri* [1995]; Forest [1998]; Smyshlyaev e Cherednichenko [2000]; Peerlings e Fleck [2004]; Smyshlyaev [2009]. Si prevede che queste teorie possano anche supportare con successo nuove tecniche di propagazione dell'omogeneizzazione di compositi fibrorinforzati e particolati e che le proprietà dinamiche possano essere approssimate mediante metodi iterativi basati sulla dispersione sulla previsione dell'attenuazione delle onde in questi materiali.

9.8 Omogeneizzazione del tensore gradiente di deformazione di ordine superiore, di materiali con struttura periodica

Utilizzando la teoria del continuo per l'omogeneizzazione di strutture elastiche periodiche, si ottengono risultati migliori, rispetto all'utilizzo di approcci puramente numerici, come il metodo di elementi discreti o il metodo degli elementi finiti con elementi di contatto speciali, dal momento che richiede meno potenza di calcolo e, più

importante, poiché rivela le proprietà fondamentali dei sistemi studiati tramite considerazioni analitiche. Più specificamente, la metodologia di omogeneizzazione proposta da Pasternak e M. [2005] (tecnica di espansione differenziale generalizzata), non si basa, come gli altri metodi, sulla precedente ipotesi di mezzo continuo (ad esempio il classico continuo di Boltzmann) e può, equivalentemente, descrivere la cinematica della microstruttura.

Pasternak e M. [2005] hanno modellato la natura discreta dei materiali granulari mediante equazioni alle differenze finite, che vengono omogeneizzati in due modi:

1. mediante espansioni di Taylor, portando ad un mezzo tipo Cosserat;
2. mediante una trasformazione discreta di Fourier, portando ad un modello non locale di tipo Kunin.

Si è constatato che il mezzo tipo Cosserat è più semplice e affidabile. Tuttavia, questo metodo richiede la teoria del tensore gradiente di deformazione di ordine superiore, introdotta da Germain [1973] e Mindlin [1965] che è più complicata, ma offre le funzioni cinematiche richieste per descrivere la microstruttura. Allo stesso tempo, questa teoria permette la formulazione delle leggi costitutive in termini di microforze e micro-momenti nella microstruttura e rende possibile la descrizione del comportamento dinamico delle strutture, anche nel caso di una lunghezza d'onda tendente alla lunghezza caratteristica (effetti di scala).

Di particolare interesse è la propagazione delle onde, la dispersione e la riflessione in queste strutture periodiche. In questo contesto Gourgiotis e Georgiadis [2008] ha presentato gli effetti di scala in mezzi elastici; mentre in Georgiadis e Velgaki [2003] hanno studiato la propagazione delle onde con piccolissima lunghezza d'onda nei materiali stratificati; in Georgiadis *e altri* [2004] è mostrata l'esistenza delle onde di superficie di Rayleigh con dispersione sotto alte frequenze; in Georgiadis *e altri* [2000] è presentata la creazione di onde SH e onde di superficie torsionali. L'effetto dei carichi di superficie in movimento è anche studiato in Suiker *e altri* [1999]; Georgiadis e Lykotrafitis [2001].

La biomeccanica e, più specificamente, la caratterizzazione di differenti tessuti (ossa, muscoli, pelle e angioplastica), è chiaramente un campo della meccanica, che può

ottenere un elevato profitto dalle tecniche di omogeneizzazione Eftaxiopoulos e Atkinson [2005]. In generale, i tessuti mostrano importante porosità ed elevata eterogeneità. In prima approssimazione, la loro struttura è periodica e assomiglia a un traliccio tridimensionale. Diversi tentativi di simulare il comportamento di questi tessuti sono stati fatti da diversi ricercatori nel quadro dell'elasticità classica. Tuttavia, la considerazione ad hoc di tali materiali come il continuo di Boltzmann, ottenuto trascurando le eterogeneità, non è ovvia: Buechner e Lakes [2003]; Bigoni e Drugan [2007]. Al contrario, il contesto di mezzo continuo di ordine superiore come, per esempio, il continuo di Cosserat Forest *e altri* [2001]; Park e Lakes [1986] sembra costituire una base per un'approssimazione più coerente della risposta meccanica di questi materiali sotto l'omogeneizzazione. Questo è l'obiettivo della ricerca in materia. Inoltre, l'omogeneizzazione potrebbe contribuire alla conservazione dei monumenti, dato che quasi tutte le antiche strutture sono realizzate in pietrame discreto a secco. La tecnica di omogeneizzazione in esame, è generalmente stabilita con preziosi risultati per quanto riguarda il comportamento meccanico di strutture murarie antiche o tronco coniche. Interessanti applicazioni possono essere trovate nel lavoro di Mühlhaus *e altri* [1997] sull'omogeneizzazione di una colonna di muratura a secco Sulem e Mühlhaus [1997]; Cerrolaza *e altri* [1999]; Stefanou *e altri* [2008], su blocchi strutturali bi e tridimensionali e in Stefanou *e altri* [2010], sulle strutture in murature incastrate.

Si prevede che per strutture antiche possono essere proposti opportuni legami costitutivi, modellando loro come sistemi di blocchi rigidi, i quali interagiscono con forze e momenti. A livello microscopico, questi blocchi, che costituiscono la microstruttura del sistema, possono muoversi, scivolare o ruotare l'uno rispetto all'altro. Questo complesso moto relativo dei blocchi di muratura, è espresso a livello macroscopico come deformazione della struttura.

9.9 Propagazione delle onde nei mezzi compositi

La propagazione delle onde nei compositi gioca un ruolo importante in molte applicazioni (acustica oceanica, geofisica, imaging medicale, l'individuazione di bombe, e problemi sismici inversi). Per quanto riguarda lo studio della propagazione delle onde

e problemi di imaging nelle applicazioni sopra, ci sono due metodologie. Nel primo approccio metodologico, le eterogeneità sono modellate come supporti casuali e vengono applicati metodi di analisi stocastiche. Questo approccio è stato sistematicamente sviluppato da vari autori Tsogka e Papanicolaou [2002]; Berryman *e altri* [2004]; Borcea *e altri* [2002, 2003, 2005, 2006b,a]. Nel secondo approccio, il mezzo eterogeneo è rappresentato da potenziali deterministici, sviluppati in molti casi di strutture caustiche. La caustica è la superficie di involuppo dei raggi di luce riflessa o rifratta da una superficie curva, da un oggetto, o dalla proiezione dell'involuppo dei raggi luminosi su un'altra superficie. Questo approccio utilizza sistemi dinamici, e le tecniche di caos quantici sono state sviluppate da Zaslavsky [2002] nel contesto dell'acustica oceanica. Vale la pena di notare che, in entrambi gli approcci, la funzione di Wigner e il suo limite asintotico sono gli strumenti di base per lo studio dei problemi di propagazione delle onde e funzionali per le immagini correlate. Seguendo i lavori di Berry sulla struttura semiclassica delle funzioni di Wigner, Filippas e Makrakis [2003] hanno costruito appropriate soluzioni di tipo Airy per avvicinarsi alle soluzioni delle equazioni di Wigner per i semiclassici nella scala corretta, per lunghezze d'onda finite per caustiche semplici. È di particolare interesse la continuazione di questa metodologia ai seguenti problemi:

1. espansioni asintotiche semiclassiche per i mezzi periodici con Hamiltoniani non integrabili, basate sulle forme di Bloch;
2. comportamento asintotico delle soluzioni del problema Wigner sulla base di autofunzioni caotiche e di noti sviluppi asintotici per il caso integrabile;
3. studio del ruolo della dinamica non integrabile sulla stabilità delle funzioni di imaging di tipo correlazione utilizzata dal mare alla tomografia.

Un'altra applicazione di interesse tecnologico è il problema di imaging nei mezzi casuali, dove l'eterogeneità indotta dal multipathing è importante. In questo caso, il problema de l'imaging è molto difficile e richiede metodi completamente diversi rispetto ai noti metodi omogenei o deterministici. La sfida è quella di ottenere risultati affidabili (cioè statisticamente stabili), in particolare per il caso in cui non si conosce

l'esatto mezzo di propagazione, ma solo alcune proprietà statistiche delle eterogeneità. Borcea *e altri* [2003]; Berryman *e altri* [2004]; Borcea *e altri* [2005, 2006a,b] e Tsogka e Papanicolaou [2002], hanno proposto una metodologia di imaging coerente (interferometria coerente) con risultati statisticamente stabili in condizioni di elevato rumore. Il primo passo di questa ricerca è stato, la proposta di un metodo generale per la stima della posizione di piccoli diffusori ben posizionati in un mezzo casuale disomogeneo usando un insieme di sensori attivi. Questo metodo prevede un'analisi temporale di arrivo dell'eco, una decomposizione in valori singolari della matrice di risposta, nel dominio della frequenza e una funzione obiettivo nel dominio del tempo Borcea *e altri* [2002] statisticamente stabile (cioè media su stesso). Nell'inversione del tempo, un insieme di trasduttori del tempo inverte il segnale e lo riimmette nel mezzo. Le onde emesse tornano indietro verso la sorgente e tendono a concentrarsi nelle sue vicinanze. In un mezzo omogeneo la risoluzione gamma-trasversale, del campo rifocalizzato alla posizione di origine, viene migliorata oltre il limite della diffrazione omogenea, in quanto la matrice può catturare le onde che si muovono da esso verso la sorgente, ma non quelle attraverso le eterogeneità. Gli autori dimostrano che questo fenomeno, chiamato super-risoluzione, implica che, a causa di percorsi multipli, la matrice sembra mostrare un'apertura efficace e presentano una procedura per stimarla dai segnali ricevuti dalla matrice. Nelle applicazioni relative alle comunicazioni spazialmente localizzate con interferenze ridotte, conoscere le aperture effettive, permette di computare la super-risoluzione in tempo inverso Borcea *e altri* [2003]. Si prevede che tale metodologia può essere estesa alla soluzione matematica e numerica di nuove applicazioni di imaging acustico marino e allo studio dei suoi limiti di applicabilità in termini di perturbazioni, di isotropia del mezzo casuale, e di distanza.

La sismologia è un altro campo in cui la propagazione delle onde in mezzi eterogenei, può svolgere un ruolo importante. La simulazione della risposta sismica in un ambiente cittadino e l'interazione tra la sorgente e il costruito in terreni soffici è di particolare interesse Groby *e altri* [2005]. Il fenomeno è caratterizzato da l'aumento e dal prolungamento delle onde sismiche a causa di onde guidate. Si prevede un aumento delle attività con le nuove tecniche matematiche in sismologia, insieme con le tecniche di imaging applicate a problemi sismici inversi.

9.10 Tecniche cinetiche

Lo studio delle oscillazioni dei sistemi iperbolici tramite la compattezza compensata ha lo svantaggio ben noto che l'informazione ottenuta è relativa ad un fissato punto e istante temporale. In altre parole, la formulazione cinetica per le leggi di conservazione scalare Lions *e altri* [1994a] o, i bilanci relativi per il sistema di dinamica dei gas isentropici Lions *e altri* [1994b], o i sistemi elastici Perthame e Tzavaras [2000], fornisce equazioni evolutive per “funzioni cinetiche”, la quale in linea di principio dovrebbe acquisire informazioni sulla propagazione delle oscillazioni. Anche se la questione degli annullamenti delle oscillazioni è molto adeguatamente studiata usando questa struttura, i progressi sulla questione della propagazione delle oscillazioni sono stati più lenti del previsto, quindi, sembrano richiedere nuove metodologie, anche per il caso di una legge di conservazione scalare.

Jabin e Tzavaras [2009] hanno studiato i problemi di omogeneizzazione periodica riguardante il trasporto di scaglie sottili oscillanti. Hanno considerato funzioni oscillanti, e ipotizzato, che fosse previsto il periodo di oscillazione dell'eterogeneità tipica. Introducendo una decomposizione associata con la decomposizione cellulare, e una quantità in doppia scala, riescono a risolvere il problema limite idrodinamico per l'equazione cinetica dell'equazione di omogeneizzazione iperbolica. Trasformazioni simili possono essere applicate ai problemi che hanno più scale periodiche, o per problemi di omogeneizzazione con maggiore diffusione. Sviluppi asintotici multiscala, spesso sono utilizzati nella teoria dell'omogeneizzazione, trasformandoli in processi con due step:

1. la derivazione dell'equazione cinetica;
2. l'usuale espansione di tipo Hilbert usata per modelli cinetici.

Jabin e Tzavaras [2009] hanno studiato i problemi di omogeneizzazione nell'ottica di sviluppare il collegamento tra i problemi di omogeneizzazione ed i limiti cinetici. Una questione fondamentale è quella di individuare un criterio per la limitazione delle quantità di trasformazione, che abbia informazioni sufficienti a garantire l'unicità del problema; ad esempio usando le idee della teoria cinetica, come le gerarchie temporali,

è possibile ottenere informazioni sul problema. Questo approccio offre alcuni nuovi approfondimenti, rispetto ai ben noti risultati ottenuti nelle omogeneizzazioni iperboliche Hou [1988]; Hou e Xin [1992]. Si prevede che i problemi contenenti interazioni non banali, tra le scale veloce e lenta, ma con spazio nullo associato al problema cellulare, essendo esplicitamente rappresentativi in termini di funzioni di Bloch e di un campo variabile lentamente, possono fornire informazioni sul calcolo numerico efficace delle onde variabili velocemente, e la conoscenza analitica su come approcci omogeneizzazione lineare possono combinarsi con l'approccio Wigner, per ottenere una rappresentazione efficiente della propagazione dell'energia.

9.11 Il volume elementare rappresentativo

In micromeccanica il concetto di Volume Elementare Rappresentativo (*RVE*) Nemat-Nasser e Hori [1999] è impiegato per stimare le proprietà del continuo in un punto materiale del mezzo, in termini di microstruttura e microcomponenti che compongono tale punto materiale e l'intorno infinitesimale circostante il punto materiale, cioè *ottenere le caratteristiche costitutive in termini delle proprietà e la struttura dei microcomponenti*. Queste proprietà costitutive, spesso espresse come *relazioni costitutive*, sono poi utilizzate nelle equazioni di equilibrio per calcolare la risposta complessiva della massa continua su cui sono applicati i carichi e prescritti dati di frontiera. Le equazioni di equilibrio includono le equazioni di conservazione della massa, del momento lineare ed angolare e dell'energia. Queste equazioni contengono le forze di volume rappresentanti gli effetti del materiale non in contatto con il continuo considerato e le forze d'inerzia dovute dal moto dello stesso continuo, così come la forza associata ai dati di spostamento limite che rappresentano l'effetto dell'altro continuo in contatto col continuo considerato. Tuttavia, nella formulazione ai valori di frontiera dei problemi associati al *RVE*, non è necessario includere le forze di volume. Inoltre, per una vasta gamma di problemi,¹ includere i termini di inerzia, è altresì non necessario. Il requisito

¹Un esempio in cui le forze di inerzia sono di primaria importanza è la descrizione delle leggi dei gas in termini di moto molecolare corrispondente. Un altro esempio è la descrizione della capacità termica dei solidi in termini di vibrazioni atomiche.

fondamentale è quello di ottenere le proprietà medie complessive del *RVE*, quando le azioni applicate, inducono nell'intorno del continuo materiale infinitesimale, rappresentato dal *RVE*, dei campi uniformi. In altre parole, un *RVE* può essere visto come un mezzo eterogeneo sotto prescritti dati di frontiera che corrispondono ai campi continui locali uniformi. L'obiettivo quindi è quello di calcolare i parametri di risposta complessivi, e utilizzare questi per descrivere le proprietà locali dell'elemento materiale continuo.

Poiché la microstruttura del materiale, cambia nel corso della deformazione, in generale cambiano anche le proprietà del suo *RVE*. Quindi, spesso è necessaria una formulazione incrementale. Per alcuni problemi di elasticità, tuttavia, ciò può non essere necessario, ma può bastare una formulazione in termini di tensioni e deformazioni totali.

Consideriamo un *RVE* di volume V limitato da una superficie regolare ∂V . Un generico punto appartenente a V , è identificato dal suo vettore posizione \mathbf{x} , e le componenti sono: x_i con $i = 1, 2, 3$, relativamente al sistema di riferimento cartesiano. Indicando con \mathbf{e}_i dove $i = 1, 2, 3$ i versori del sistema di riferimento, il vettore posizione \mathbf{x} diventa

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \quad (9.5)$$

dove gli indici ripetuti sono sommati. Per gli scopi dei calcoli micromeccanici, l'*RVE* è guardato come un *continuo eterogeneo con variabili speciali, ma con proprietà costitutive note*. In molti casi, l'obiettivo è quello di stimare un campo elastico medio, ad esempio, l'incremento di deformazione, in funzione delle corrispondenti forze superficiali incrementali imposte, oppure, viceversa, l'aumento medio della sollecitazione, in funzione degli spostamenti incrementali superficiali imposti. Per i macrocampi uniformi, le forze superficiali incrementali imposte, possono essere considerate come spazialmente uniformi, o, nel caso opposto, gli spostamenti incrementali superficiali imposti possono essere assunti come spazialmente lineari.

Sotto i dati di superficie imposti, il *RVE* dev'essere in equilibrio e subire cinematismi compatibili con la sua deformazione complessiva. Nella modellazione costitutiva, le forze di volume ed i termini di inerzia sono assenti. Pertanto, le forze superficiali prescritte, devono essere autoequilibrate. Allo stesso modo, gli spostamenti superficiali

prescritti, devono essere auto-compatibili in modo da non includere traslazioni di corpi rigidi o rotazioni. Inoltre, se gli spostamenti superficiali prescritti sono associati con un campo di deformazione, questo campo deve essere compatibile. *Queste condizioni sono assunte valide in questa tesi, ogni volta che abbiamo a che fare con un RVE con i dati di confine imposti.*

Sia quando sono imposti spostamenti al contorno che quando sono imposte forze al contorno, un approccio micromeccanico praticabile, deve produrre parametri costitutivi globali equivalenti per il corrispondente macro-elemento. Ad esempio, se vengono calcolati i moduli elastici e le cedevolezza, allora il modulo del tensore risultante, ottenuto per gli spostamenti incrementali imposti sulla superficie, deve essere l'inverso del tensore cedevolezza ottenuto per le forze superficiali incrementali applicate sul RVE.

Lo spostamento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, la deformazione $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ e la sollecitazione $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, all'interno del volume V del RVE, variano da punto a punto, sempre che le forze di volume siano uniformi o gli spostamenti di frontiera siano lineari. Le equazioni che governano il campo, in un generico punto \mathbf{x} in V , includono l'equilibrio dei momenti lineare e angolare,²

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (9.6a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \text{ in } tV \quad (9.6b)$$

e la relazione spostamento-deformazione

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \} \text{ in } V \quad (9.7)$$

dove l'operatore ∇ è definito come:

$$\nabla = \partial_i \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (9.8)$$

e l'apice T denota la trasposta. In un sistema di riferimento cartesiano, l'equazione (9.6a) e l'equazione (9.7) diventano

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad (9.9a)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ in } V \quad (9.9b)$$

²Qui si assume che i campi di sforzo e di deformazione siano continui.

e

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ in } V \quad (9.10)$$

dove $\mathbf{i}, \mathbf{j} = 1, 2, 3$ e $(\cdot)_{,i}$ denota la derivata parziale di (\cdot) rispetto alla variabile i .

Quando le forze autoequilibrate (non necessariamente uniformi), \mathbf{t}^0 , sono assunte imposte sulla frontiera del RVE, come mostrato in figura 9.1a, si ha

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}^0 \text{ su } \partial V \text{ oppure} \quad (9.11a)$$

$$\sigma_{ij}\nu_j = t_i^0 \text{ su } \partial V \quad (9.11b)$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ è il vettore normale uscente da ∂V . In altre parole, quando gli spostamenti (non necessariamente lineari), \mathbf{u}^0 , sono assunti imposti sulla frontiera di RVE, come mostrato in figura 9.1b, si ha di conseguenza:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \text{ su } \partial V \text{ oppure} \quad (9.12a)$$

$$u_i = u_i^0 \text{ su } \partial V \quad (9.12b)$$

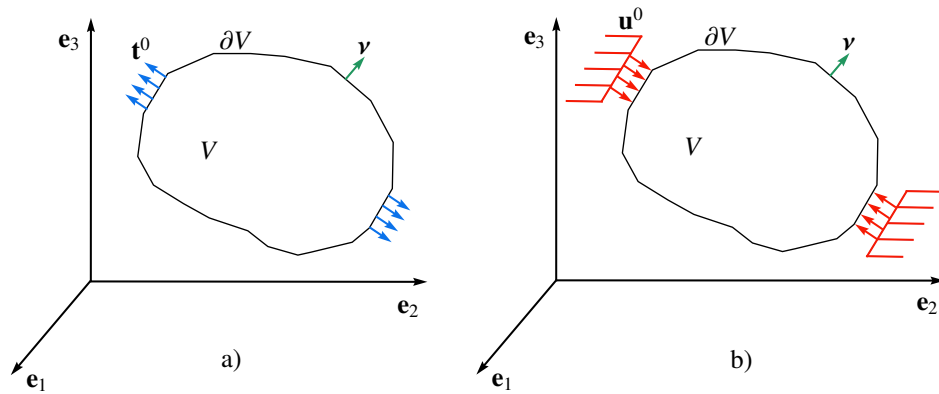


Figura 9.1: a) Condizione di forze sulla frontiera; b) Condizione di spostamenti sulla frontiera

Per la formulazione integrale è necessario considerare un problema variazionale, dove le forze variabili $\dot{\mathbf{t}}^0$, o le velocità $\dot{\mathbf{u}}^0$, ma non entrambe, come discusso in prece-

denza, possono essere considerate come preassegnate sulla frontiera del *RVE*. Qui le variazioni di $\dot{\mathbf{t}}^0$, o di $\dot{\mathbf{u}}^0$, possono essere misurate in termini di un parametro monotono crescente, poiché non è incluso alcun effetto di inerzia. Le equazioni di campo base vengono ottenute dalle (9.6a-9.12a), sostituendo le corrispondenti quantità, ad esempio $\dot{\sigma}$ per σ , $\dot{\varepsilon}$ per ε e $\dot{\mathbf{u}}$ per \mathbf{u} , arrivando a

$$\nabla \dot{\sigma} = \mathbf{0} \quad (9.13a)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^T \text{ in } V \quad (9.13b)$$

e la relazione spostamento-deformazione

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})^T \} \text{ in } V \quad (9.14)$$

Quando è imposto il sistema di forze variabili autoequilibrato sulla frontiera del volume rappresentativo,

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{t}}^0 \text{ su } \partial V \quad (9.15)$$

e quando è imposto il sistema della velocità autocompatibile $\dot{\mathbf{u}}^0$,

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^0 \text{ su } \partial V \quad (9.16)$$

9.12 Strumenti matematici di omogeneizzazione

L'omogeneizzazione è un termine generale che indica la procedura per omogeneizzare le proprietà di un materiale disomogeneo per ottenerne un'approssimazione a livello superiore.

Gli ingredienti principali di questa procedura sono la media dei campi sul volume del dominio e la proiezione dei risultati sul contorno del dominio. Le tecniche di omogeneizzazione sono basate sul concetto di volume rappresentativo, discusso nel paragrafo 9.11, e introdotto per la prima volta da Hill [1965a]. Un *RVE* rappresenta un punto macroscopico nel materiale (vale a dire un punto di integrazione in un modello agli elementi finiti) come volume disomogeneo dalle dimensioni finite, che è rappresentativo della microstruttura del materiale. L'obiettivo è quindi quello di risolvere un

problema complementare sul *RVE* e quindi utilizzare i risultati in macroscale. Una delle possibilità di utilizzo del *RVE* è di risolvere un modello agli elementi finiti, definito sul *RVE* utilizzando come condizioni al contorno, una combinazione dei valori macroscopici. I risultati calcolati vengono restituiti alla macroscale mediante opportune tecniche di mediazione. Questa procedura sarà molto accurata se preventivamente viene eseguita un'analisi dettagliata delle deformazioni e dalle tensioni che si sviluppano nel *RVE*. D'altra parte, è evidente che questo metodo è computazionalmente molto costoso.

Il metodo Mean-Field, si basa sul concetto di un *RVE* fittizio piuttosto che su uno vero e proprio. Le disomogeneità sono trattate come domini omogenei distinti in un aggregato di domini. I campi sui sottodomini sono rappresentati dai loro valori medi. Il problema complementare è quello di risolvere l'interazione dei sottodomini e trovare delle nuove medie che soddisfano le condizioni al contorno. Questo è di solito effettuato utilizzando soluzioni analitiche in luogo di versioni semplificate del problema. Una delle fasi principali dell'omogeneizzazione, è la scala di transizione, che richiede quantità macroscopiche da trasferire alla scala inferiore e viceversa. Questo processo viene eseguito utilizzando un operatore di media. L'ipotesi è quindi che le quantità macroscopiche possano essere descritte con le medie su un volume, dei campi microscopici. L'operatore media è definito come

$$\langle g(\mathbf{x}) \rangle_\omega = \frac{1}{V} \int_\omega g(\mathbf{x}) dV = \bar{g} \quad (9.17)$$

dove g è un qualsiasi campo definito sul dominio, \bar{g} è il valore macroscopico e $\langle g(\mathbf{x}) \rangle_\omega$ è il valore medio di g sulle coordinate \mathbf{x} appartenenti al volume V . L'equazione (9.17) implica che il volume sul quale è mediato un campo può essere decoposto in differenti domini

$$\langle g(\mathbf{x}) \rangle_\Omega = \frac{1}{V} \sum_k \int_{\omega_k} g(\mathbf{x}) dV_k, \quad \omega = \bigcup_k \omega_k \quad (9.18)$$

Riscrivendo l'equazione (9.18) in termini di frazioni di volumi dei domini decomposti si ha

$$\langle g(\mathbf{x}) \rangle_\omega = \sum_k f_k \langle g(\mathbf{x}) \rangle_{\omega_k}, \quad f_k = \frac{V_k}{V} \quad (9.19)$$

Per essere in grado di giustificare il passaggio di scala per le sollecitazioni e le deformazioni, deve essere garantita l'uguaglianza del lavoro meccanico calcolato in entrambe le scale. Ciò richiede che il lavoro meccanico mediato sul *RVE* dev'essere uguale al lavoro meccanico che viene calcolato utilizzando le sollecitazioni e le deformazioni medie. In termini matematici, detta condizione equivale a dire

$$\bar{\sigma} : \bar{\epsilon} = \langle \sigma \rangle_{\omega} : \langle \epsilon \rangle_{\omega} = \langle \sigma : \epsilon \rangle_{\omega} \quad (9.20)$$

l'equazione (9.20) è nota come condizione di Hill-Mandel.

In accordo con Hill [1965a], una condizione necessaria per la validità di questa condizione è che nel *RVE* siano soddisfatte sia le condizioni di equilibrio che di compatibilità.

Le equazioni scritte sinora servono solo per fornire una scala di transizione una volta che sono noti i campi da determinare sul *RVE*. Inoltre, le condizioni al contorno applicate sulla superficie del *RVE* devono essere tali che da produrre nel *RVE*, quando il materiale è omogeneo, una sollecitazione o deformazione uniforme.

Supportato dalla condizione Hill-Mandel, le relazioni di transizione di scala per la deformazione e la sollecitazione sono date dalle seguenti uguaglianze

$$\bar{\sigma} = \sum_k f_k \langle \sigma \rangle_{\omega_k}, \quad \bar{\epsilon} = \sum_k f_k \langle \epsilon \rangle_{\omega_k} \quad (9.21)$$

Queste equazioni sono esatte nell'ipotesi di piccole deformazioni. Nel caso di deformazioni o sollecitazioni finite, devono fatte, alcune ipotesi. Una delle difficoltà quando si tratta di grandi deformazioni è la scelta del volume sul quale eseguire l'operazione di media. Nei casi di deformazioni e sollecitazioni finite, il riferimento alla configurazione deformata cambia caso per caso. Questo provoca un'incoerenza nel riferire i valori medi macroscopici ai valori medi definiti sul *RVE*. Un'eccellente analisi delle medie in grandi deformazioni, è riportata in Nemat-Nasser [1999a].

Le equazioni presentate finora forniscono solo i rapporti di transizione di scala, una volta che i campi sono determinati sul *RVE*. Utilizzando un approccio diretto agli Elementi Finiti, i campi possono essere valutati applicando tensioni macroscopiche o sforzi, in termini di condizioni al contorno di superficie (rispettivamente trazione e spostamento) sul *RVE*. Una volta che i campi sono stati calcolati numericamente, vie-

ne effettuata la media ed i risultati vengono trasferiti alla macroscale. Negli schemi di omogeneizzazione “Mean Field”, invece dei campi, sono calcolate solo le medie in differenti sottodomini, sulla base di una serie di ipotesi che verranno descritte successivamente. Per calcolare il campo di deformazione e di sollecitazione su un *RVE*, deve essere nota la risposta meccanica. Generalmente nel metodo Mean Field si presume che ogni fase costituente, segue il proprio comportamento materiale macroscopico. Inoltre gli effetti delle interazioni tra le fasi e dei relativi limiti sono trascurabili. Con questi presupposti il rapporto tra la tensione media e la tensione nei sottodomini della *RVE* è fornita da modelli di materiale continuo:

$$\langle \sigma \rangle_{\omega_k} = \mathbb{C}_k : \langle \epsilon \rangle_{\omega_k} \quad (9.22)$$

dove \mathbb{C} è il tensore di elasticità.

L'equazione (9.22) fornisce la relazione di sforzo-deformazione per ogni fase, presa singolarmente. Tuttavia al fine di calcolare sia la sollecitazione che la deformazione, deve essere fornita una di queste quantità. Pertanto le equazioni date finora non sono sufficienti a risolvere il problema dell'omogeneizzazione. Le restanti equazioni devono fornire la relazione tra tensione e deformazione attraverso diverse fasi. Queste equazioni possono essere scritte in termini di deformazioni o di concentrazione di tensioni:

$$\langle \epsilon \rangle_{\omega_k} = \mathbb{A}_k : \langle \sigma \rangle_{\omega_k} \quad \langle \sigma \rangle_{\omega_k} = \mathbb{B}_k : \langle \epsilon \rangle_{\omega_k} \quad (9.23)$$

dove \mathbb{A}_k e \mathbb{B}_k sono tensori del 4° ordine, rispettivamente di concentrazione di deformazione e di tensione. Gli schemi di omogeneizzazione “Mean-Field” differiscono l'uno dagli altri per la selezione di questi tensori.

9.13 Schemi di omogeneizzazione

Gli schemi di omogeneizzazione più semplici sono quelli di Voigt e Reuss, in cui sono rispettivamente assunte condizioni di isodeformazione e isosollecitazioni tra le fasi. Nello schema di Voigt tutti i tensori di concentrazione di deformazione sono uguali all'unità, cioè $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ e fornisce un limite superiore per la risposta del composito

in termini di sollecitazione. Similmente nello schema di Reuss, le concentrazioni di tensione sono unitarie, cioè $\mathbb{B} = \mathbb{I}$ e fornisce un limite inferiore per la risposta del composito in termini di sollecitazione. Un approccio migliore per determinare il tensore di deformazione è di usare la soluzione analitica di Eshelby per il problema della disomogeneità. Eshelby ha introdotto la teoria dell'inclusione equivalente, vista nel paragrafo 3.6 al fine di risolvere il problema della concentrazione di deformazione per una singola disomogeneità incorporata in una matrice infinitamente grande. Quindi la soluzione può essere utilizzata solo per un composito con due fasi: la matrice e la disomogeneità. Eshelby dimostrò che quando il mezzo indefinito è isotropo e la disomogeneità è di forma ellissoidale, i campi di sollecitazione e di deformazione localizzata nell'inclusione sono uniformi.

9.13.1 La soluzione di Eshelby

Il problema è di trovare la concentrazione di deformazione causata da una singola disomogeneità in una matrice indefinita. Prima di arrivare alla soluzione di Eshelby, si deriva la teoria dell'inclusione. In questo problema di equilibrio, tensione e deformazione devono essere determinati nel caso in cui è prescritta la deformazione in un certo volume all'interno di un mezzo omogeneo infinitamente grande. La deformazione prescritta è stressfree, cioè nessuna sollecitazione sviluppata, è il risultato di questa deformazione in un ambiente vincolato. Quando è vincolato dalla matrice, la deformazione di equilibrio, è data da

$$\tilde{\epsilon} = \mathbb{S} : \epsilon^* \quad (9.24)$$

dove ϵ^* è l'autodeformazione, $\tilde{\epsilon}$ è la deformazione di equilibrio ed \mathbb{S} è il tensore di Eshelby, il quale è funzione delle proprietà della matrice e della forma dell'inclusione. Eshelby propone che lo sforzo concentrato in una disomogeneità può essere ugualmente rappresentato come lo stress concentrato in un'inclusione (che occupa lo stesso dominio della disomogeneità) sottoposta ad un'autodeformazione arbitraria. In termini matematici dall'equazione (3.87) si ha

$$C_I : (\epsilon_M + \tilde{\epsilon}) = C_M : (\epsilon_M + \tilde{\epsilon} - \epsilon^*) \quad (9.25)$$

dove I e M denotano rispettivamente le disomogeneità (inclusione) e la matrice. Usando l'equazione $\tilde{\varepsilon} = \mathbb{S} : \varepsilon^*$ e considerando che $\varepsilon_I = \tilde{\varepsilon} + \varepsilon_M$, la concentrazione di deformazione può essere ottenuta nella seguente forma

$$\varepsilon_I = \left[\mathbb{S} : (\mathbb{C}_M^{-1} : \mathbb{C}_I - \mathbb{I}) \right]^{-1} : \varepsilon_M \quad (9.26)$$

Questa soluzione analitica è valida, come menzionato, per il caso di una singola inclusione e quando la matrice ha una estensione infinita. Pertanto non è direttamente applicabile al *RVE* dove la matrice ha dimensioni paragonabili all'inclusione. Per poter utilizzare la soluzione di omogeneizzazione di Eshelby devono essere fatte alcune ipotesi. Pertanto a seguito dell'opera di Eshelby, per risolvere il problema, sono stati proposti diversi schemi di omogeneizzazione, che si basano su approcci diversi.

9.13.2 Metodo self-consistent

Questo metodo è stato originariamente sviluppato per calcolare la risposta meccanica dei policristalli Kröner [1958]; Hill [1965c] e prende in considerazione l'interazione della matrice ed i grani usando la soluzione di Eshelby. Nel modello ogni grano è trattato come un'inclusione nel *RVE* complessivo. Quindi sulla base dell'equazione (9.26) la concentrazione di deformazione per ogni grano diventa

$$\mathbb{A}_k = \left[\mathbb{E} : (\mathbb{C}^{-1} : \mathbb{C}_k - \mathbb{I}) + \mathbb{I} \right]^{-1} \quad (9.27)$$

dove \mathbb{C} e \mathbb{C}_k sono riferiti rispettivamente al tensore di elasticità del *RVE* e del grano k -esimo. Il tensore di Eshelby nella precedente equazione è una funzione della forma del grano e delle proprietà elastiche del *RVE*. Il tensore di elasticità del *RVE* è calcolato come:

$$\mathbb{C} = \sum_k f_k \mathbb{C}_k : \mathbb{A}_K \quad (9.28)$$

Sostituendo l'equazione (9.28) nell'equazione (9.27) diventa chiaro che questo schema ha una natura implicita e richiede un algoritmo di soluzione non lineare.

9.13.3 Metodo Mori-Tanaka

Per i materiali compositi che coinvolgono solo due fasi, un approccio più semplice è stato proposto da Tanaka e Mori [1970]. In questo schema, si assume che l'inclusione nel RVE, è sottoposta alla deformazione della matrice, così come nella teoria di Eshelby è sottoposta al campo di deformazione all'infinito.

Questa ipotesi permette di scrivere la seguente relazione

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_I} &= \left[\mathbb{S} : (\mathbb{C}_M^{-1} : \mathbb{C}_I - \mathbb{I}) + \mathbb{I} \right]^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_M} \\ &= \mathbb{H} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_M}\end{aligned}\quad (9.29)$$

dove \mathbb{H} è il tensore che descrive la relazione tra le deformazioni in ogni fase, ed è legato alla concentrazione di deformazione dalla seguente:

$$\mathbb{A} = [f\mathbb{I} + (1-f)\mathbb{H}^{-1}]^{-1} \quad (9.30)$$

La relazione (9.29), si avvicina alla soluzione esatta quando la frazione di volume dell'inclusione si annulla. Pertanto si può dedurre che il metodo Mori-Tanaka è ben applicabile per basse concentrazioni della seconda fase. Per alte frazioni di volume, l'equazione (9.29) può essere invertita per trovare:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_I} = \left[\mathbb{S} : (\mathbb{C}_I^{-1} : \mathbb{C}_M - \mathbb{I}) + \mathbb{I} \right] : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_M} \quad (9.31)$$

Questa proprietà rende lo schema Mori-Tanaka attraente per i materiali compositi a due fasi con frazioni a basso o alto volume delle inclusioni. Inoltre, come visto nell'equazione (9.29) e (9.31) lo schema è esplicito e quindi si può calcolare senza ricorrere a strumenti di calcolo non lineare.

9.13.4 Metodo di interpolazione di Lielens

Un metodo alternativo per compositi bi-fase è stato proposto da Lielens. Questo modello è basato sulla interpolazione dello schema Mori Tanaka come funzione della frazione di volume delle fasi. Con questo approccio viene incrementata l'accuratezza dello schema Mori-Tanaka per frazioni di volume intermedie. Per calcolare il tensore di deformazione nell'algoritmo di Lielens, il rapporto delle deformazioni in ogni fase

è formulata come:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbb{H}} &= \left[\mathbb{S} : (\mathbb{C}_M^{-1} : \mathbb{C}_I - \mathbb{I}) + \mathbb{I} \right]^{-1} \\ \overleftarrow{\mathbb{H}} &= \mathbb{S} : (\mathbb{C}_I^{-1} : \mathbb{C}_M - \mathbb{I}) + \mathbb{I} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_I} &= \left[(1 - \phi) \vec{\mathbb{H}}^{-1} + \phi \overleftarrow{\mathbb{H}}^{-1} \right]^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_M}\end{aligned}\tag{9.32}$$

dove $\phi(f)$ è la funzione di interpolazione scelta.

È possibile osservare che i tensori $\vec{\mathbb{H}}$ e $\overleftarrow{\mathbb{H}}$ indicano rispettivamente il diretto e l'inverso dello schema Mori-Tanaka. Il requisito di $\phi(f)$ è che dovrebbe essere sempre compresa nell'intervallo $0-1$ e assume questi valori rispettivamente quando f è uguale a 0 e 1 .

Una funzione che soddisfa questi requisiti è $\phi = f^p$, con $p \geq 0$ dove p è introdotto come parametro di raccordo. Come visto nell'equazione (9.32), il modello di Lielens è esplicito e approssima il vero Modello Mori-Tanaka per $f = 0$ e l'inverso di Mori-Tanaka per $f = 1$. La risposta del composito per una frazione di volume intermedia è stimata dall'interpolazione dei due. Tuttavia una base teorica per questa fascia è difficile da ottenere dal momento che i termini “matrice” e “inclusione” diventano irrilevanti. Lo schema self-consistent tratta ogni fase come un'inclusione nel materiale composito, ma la validità di questo approccio è discutibile a queste frazioni di volume. Il parametro p introdotto nell'equazione (9.32) diventa efficace in questa regione e svolge un ruolo importante sulla rigidità degli intervalli intermedi.

9.13.5 Metodo di interpolazione Bound

Questo metodo è impiegato per l'omogeneizzazione di compositi a due fasi e non richiede il calcolo del Tensore di Eshelby. Si basa, su una funzione di interpolazione per descrivere la partizione della deformazione. L'interpolazione è basata sui modelli Reuss e Voigt per cambiare le frazioni di volume delle inclusioni. La relazione tra le deformazioni delle fasi è definita come

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_I} = \left[(1 - \phi) \mathbb{C}_M^{-1} : \mathbb{C}_I + \phi \mathbb{I} \right]^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\omega_M}\tag{9.33}$$

dove ϕ è la funzione di interpolazione.

Nel modello di Lielens i punti iniziali e finali, sono definiti come il diretto e l'inverso del modello Mori-Tanaka, i quali sono molto accurati. In questo schema, tuttavia, il punto iniziale è l'assunzione di Reuss ed il punto finale è l'assunzione di Voigt, i quali sottostimano e sovrastimano la rigidità. Qui un'altra funzione di interpolazione è proposta per ϕ come

$$\phi = (C_1 + C_2 f)^{C_3} \quad (9.34)$$

dove C_{1-3} sono parametri di adattamento. Al fine di non violare i requisiti teorici, i parametri scelti devono soddisfare le seguenti condizioni

$$\begin{aligned} - 0 &\leq C_1^{C_3} \leq 1 \\ - 0 &\leq (C_1 + C_2)^{C_3} \leq 1 \end{aligned}$$

La tecnica proposta può essere alternativamente derivata dal metodo Mori-Tanaka. Iniziando dalla concentrazione del tensore nell'equazione (9.29), se il tensore di Eshelby \mathbb{S} è rimpiazzato con il tensore sferico:

$$\mathbb{S} = (1 - \phi)\mathbb{I} \quad (9.35)$$

si ottiene l'equazione (9.33).

Questa derivazione inoltre, mostra che nei casi in cui il tensore di Eshelby è anisotropo, ad esempio le disomogeneità in forme non sferiche, l'aspetto anisotropo del materiale non può essere colto con questo approccio.

9.13.6 Omogeneizzazione elasto-plastica

Le equazioni mostrate nei paragrafi precedenti sono valide quando i costituenti del mezzo eterogeneo hanno un comportamento elastico lineare. Per estendere tali tecniche al caso di costituenti con comportamento elasto-plastico, è necessario considerare un materiale di riferimento fittizio. Hill [1965a] introduce come riferimento la linearizzazione della risposta elasto-plastica delle fasi, cioè il modulo elasto-plastico continuo. Questi moduli sono poi usati per determinare la concentrazione del tensore di deformazione delle fasi. In Moulinec e Suquet [2003a], sono discussi i vantaggi dell'usare il modulo secante su quello elasto-plastico. Si mostra per un certo numero di problemi,

che usando l'algoritmo con il modulo secante si confronta meglio con gli esperimenti. In Doghri e Ouaar [2003], vengono confrontati i vantaggi dell'utilizzo del modulo tangente continuo e dell'algoritmo tangente, incluse le loro proiezioni isotropiche. Si è dimostrato che usando l'algoritmo con il modulo tangente come materiale di riferimento e la loro proiezione isotropa nel calcolo del tensore di Eshelby, i risultati sono in buon accordo con gli esperimenti. Da questi studi è chiaro che la selezione del materiale di riferimento è molto importante per avere un algoritmo affidabile; inoltre l'algoritmo elasto-plastico del modulo tangente è scelto come materiale di riferimento. Per calcolare il tensore di Eshelby, è usata la proiezione isotropa della corrispondente tangente (per i dettagli dell'algoritmo di proiezione si può vedere Doghri e Ouaar [2003]) e le inclusioni sono considerate di forma sferica. Nelle analisi in grandi deformazioni, occorre fare particolare attenzione all'operatore media.

Quando la configurazione deformata non coincide con la configurazione di riferimento, alcune misure medie di sollecitazioni e deformazioni, non coincidono con i valori macroscopici. Nemat-Nasser [1999a] forniscono un'analisi dettagliata nel loro lavoro. Nell'ipotesi che gli spostamenti incrementali siano piccoli in confronto alla dimensione del *RVE*, la configurazione corrente può essere approssimata con la configurazione di riferimento. Questo implica che gli effetti delle incongruenze sono trascurabili. In accordo con queste considerazioni, si ottiene il tensore di deformazione simmetrico. Tuttavia, quando il gradiente di velocità $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}$ è usato come una misura della deformazione, solo la parte simmetrica $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$, cioè il grado di deformazione risulta essere ben definito e la parte antisimmetrica $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$ cioè lo spin, non sarà influenzato. Assumendo equivalenze rotazionali delle fasi risultanti nella seguente formulazione,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D} \rangle_{\omega_k} &= \mathbb{A}_k : \langle \mathbf{D} \rangle_{\omega} \\ \langle \mathbf{W} \rangle_{\omega_k} &= \langle \mathbf{W} \rangle_{\omega} \end{aligned} \tag{9.36}$$

il tensore concentrazione di deformazione, opera sul grado di deformazione di ciascuna fase e la rotazione a livello di macroscale è considerata come una rotazione rigida dell'intero *RVE*.

Capitolo 10

Conclusioni

Oggetto della ricerca nell'ambito del dottorato è stato lo studio della teoria di Eshelby e la successiva valutazione delle espressioni analitiche del cosiddetto "Tensore di Eshelby" per inclusioni di forma poligonale (caso piano di deformazione) e per quelle di forma poliedrale (caso tridimensionale).

A partire dalle equazioni fondamentali dell'elasticità e tenendo conto della funzione di Green per l'elasticità, il tensore di Eshelby è stato espresso come integrale esteso al dominio dell'inclusione di una funzione integranda che è la derivata parziale della funzione di Green.

Nel caso bidimensionale, l'integrale è esteso alla superficie dell'inclusione, sicché applicando il teorema della divergenza, l'integrale di superficie è stato ridotto ad un integrale di frontiera.

Inoltre per le inclusioni poligonali, quindi con frontiera costituita da un numero finito di tratti rettilinei, l'integrale di frontiera è espresso come sommatoria di integrali di linea estesi a ciascun lato della frontiera.

Nel caso di inclusione tridimensionale, l'integrale è esteso al volume dell'inclusione stessa, sicché applicando il teorema della divergenza si esprime come integrale esteso alla frontiera del dominio. Essendo l'inclusione poliedrale, quindi costituita da un numero finito di facce piane, l'integrale di frontiera viene espresso come la sommatoria di integrali di superficie estesi a ciascuna faccia costituente la frontiera dell'in-

clusione. A questo punto applicando nuovamente il teorema della divergenza, ciascun integrale di superficie viene espresso come integrale di frontiera e quindi si ripete la stessa procedura impiegata per il caso bidimensionale.

In entrambi i casi, cioè di inclusione poligonale e di inclusione poliedrale, gli integrali di linea a cui si riducono tutti gli integrali di superficie e di volume, dipendono solo dai vettori posizione del vertice iniziale e finale del lato sul quale si calcolano.

Nella presente tesi sfruttando la definizione della delta di Dirac, è stato risolto il problema della singolarità eliminabile, infatti solo quella analitica può essere eliminata, mentre quella fisica è ineliminabile.

Per validare le espressioni ricavate, le stesse sono state implementate in codici Matlab®.

Dalla letteratura sono stati considerati alcuni risultati numerici derivanti dall'applicazione di diverse formulazioni del tensore di Eshelby, i quali sono stati rielaborati con i codici Matlab implementati.

Confrontando i risultati, nel caso bidimensionale, si ha una discreta convergenza dei risultati calcolati con quelli presenti in letteratura, mentre nel caso tridimensionale si ha una buona convergenza nel caso del cubo, mentre per le altre forme si ha un'ottima convergenza dei risultati derivanti dall'applicazione di una procedura mista numerico-analitica, mentre i risultati presenti in letteratura presentano differenze importanti.

Le espressioni analitiche ricavate, consentono di risolvere il problema di Eshelby, per qualunque tipo di inclusione, indipendentemente dalla sua concavità e/o convessità.

La procedura consente di calcolare il tensore \mathbb{S} in qualunque punto del mezzo materiale indefinito indipendente dal valore dell'autodeformazione: di conseguenza è possibile estendere l'applicazione della soluzione analitica ricavata anche al caso di autodeformazione non costante all'interno dell'inclusione.

Appendice A

A.1 Approfondimenti sul calcolo vettoriale

Si consideri un generico vettore dello spazio \mathbf{a} ed una funzione scalare di variabile vettoriale $\varphi(\mathbf{x})$, il prodotto $\varphi \mathbf{a}$ ammette la funzione gradiente

$$\text{grad}(\varphi \mathbf{a}) = (\varphi a_i)_{/j} = \varphi_{/j} a_i + \varphi a_{i/j} = \mathbf{a} \otimes \text{grad}\varphi + \varphi \otimes \text{grad}\mathbf{a} \quad (\text{A.1})$$

Questo risultato può essere esteso al prodotto $\varphi(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$, infatti

$$\begin{aligned} \text{grad}[\varphi(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] &= (\varphi a_j b_j)_{/k} = \varphi_{/k} a_j b_j + \varphi a_{j/k} b_j + \varphi a_j b_{j/k} = \\ &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \text{grad}\varphi + \varphi \text{grad}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \varphi \mathbf{a} \otimes \text{grad}\mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nell'equazione (A.2) è stato introdotto il prodotto tensoriale $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definito come

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \quad (\text{A.3})$$

come estrapolazione di $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{B}^T$; infatti

$$[(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{C}]_{ij} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijhk} C_{hk} \quad (\text{A.4})$$

Ma in base alla definizione

$$\begin{aligned} [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{C}]_{ij} &= [\mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{B}^T]_{ij} = A_{ih} C_{hk} (B^T)_{kj} \\ &= A_{ih} C_{hk} B_{jk} = A_{ih} B_{jk} C_{hk} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

sicché

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijhk} = A_{ih} B_{jk} \quad (\text{A.6})$$

Analogamente

$$[(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{b}) \mathbf{c}]_{ij} = (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{b})_{ijh} c_h \quad (\text{A.7})$$

ed in base alla definizione,

$$[(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{b}) \mathbf{c}]_{ij} = (\mathbf{A} \mathbf{c} \otimes \mathbf{b})_{ij} = A_{ih} c_h b_j = A_{ih} b_j c_h \quad (\text{A.8})$$

Si consideri a questo punto la funzione grad $[\varphi(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})]$

$$\begin{aligned} \text{grad} [\varphi(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})] &= (\varphi a_j b_j c_h)_{/k} = \varphi_{/k} a_i b_j c_h + \varphi a_{i/k} b_j c_h \\ &\quad + \varphi a_i b_{j/k} c_h + \varphi a_i b_j c_{h/k} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Per scrivere in forma tensoriale i termini a secondo membro si introduce il prodotto tensoriale

$$(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}) \mathbf{C} = (\mathbf{A} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T) \quad (\text{A.10})$$

ovvero in componenti

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})_{ijk} C_{kh} &= (\mathbf{A} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T)_{ij} \\ &= A_{ik} (C^T)_{kh} (B^T)_{hj} = A_{ik} C_{hk} B_{jh} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Quindi

$$(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})_{ijk} = A_{ik} B_{jh} \quad (\text{A.12})$$

A.2 Espressione analitica del Tensore di Elasticità \mathbb{C}

Si consideri il tensore identità 2d

$$\mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.13})$$

L'espressione in forma compatta del tensore di elasticità \mathbb{C} è:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= G(\mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1}) + \lambda(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \\ &= G \mathbb{I} + \lambda(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Con $G = \mu$ modulo di elasticità a taglio e λ prima costante di Lamè.

Analizzando i singoli elementi che costituiscono il tensore del quarto ordine $\mathbb{I} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \mathbf{1}$, si ha

$$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{dove } (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = l \\ 0 & \text{se } i \neq k \text{ oppure } j \neq l \end{cases}$$

l'altro termine è

$$\mathbf{1} \hat{\otimes} \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\text{dove } (\mathbf{1} \hat{\otimes} \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = l \text{ e } j = k \\ 0 & \text{se } i \neq l \text{ oppure } j \neq k \end{cases}$$

Pertanto il tensore del quarto ordine \mathbb{I} è:

$$\mathbb{I} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \hat{\otimes} \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Bibliografia

- Aboudi J.; Pindera M.; Arnold S. (1999). Higher-order theory for functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, **30**(8), 777–832.
- Aderogba K. (1976). On eigenstresses in a semi-infinite solid. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 80, pp. 555–562. Cambridge Univ Press.
- Aggelis D.; Tsinopoulos S.; Polyzos D. (2004). An iterative effective medium approximation (iema) for wave dispersion and attenuation predictions in particulate composites, suspensions and emulsions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **116**(6), 3443–3452.
- Allaire G. (1992). Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**(6), 1482–1518.
- Allaire G. (2002). Shape optimization by the homogenization method. *New York: Berlin*.
- Allaire G.; Bonnetier E.; Francfort G.; Jouve F. (1997). Shape optimization by the homogenization method. *Numerische Mathematik*, **76**(1), 27–68.
- Allaire G.; Jouve F.; Maillot H. (2004). Topology optimization for minimum stress design with the homogenization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **28**(2-3), 87–98.
- Alshits V.; Maugin G. (2005). Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate. *Wave Motion*, **41**(4), 357–394.

- Avellaneda M. (1987). Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **47**(6), 1216–1228.
- Avellaneda M.; Milton G. *e altri* (1989). Bounds on the effective elasticity tensor of composites based on two-point correlations. *Composite Material Technology, ASME*, pp. 89–93.
- Babuška I. (1976a). Homogenization and its application, mathematical and computational problems. *Numerical solution of partial differential equations*, pp. 89–115.
- Babuška I. (1976b). Homogenization approach in engineering. In *Computing methods in applied sciences and engineering*, pp. 137–153. Springer.
- Bakhvalov N.; Panasenko G. (1989). Homogenisation: averaging processes in periodic media-mathematical problems in the mechanics of composite materials.
- Ball J. (1976). Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive for rational mechanics and Analysis*, **63**(4), 337–403.
- Bansal Y.; Pindera M. (2003). Efficient reformulation of the thermoelastic higher-order theory for functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, **26**(11-12), 1055–1092.
- Bansal Y.; Pindera M. (2005). A second look at the higher-order theory for periodic multiphase materials. *Journal of applied mechanics*, **72**(2), 177–195.
- Bedayat H.; Dahi T. (1998). The equivalent inclusion method for poroelasticity problems. *American Society of Civil Engineers, Vienna, Austria*, pp. 1279–1288.
- Bedayat H.; Taleghani A. (2014). Interacting double poroelastic inclusions. *Mechanics of Materials*, **69**(1), 204–212.
- Bedayat H.; Taleghani A. (2015a). Pressurized poroelastic inclusions: short-term and long-term asymptotic solutions. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, pp. 1–9.

- Bedayat H.; Taleghani A. (2015b). Two interacting ellipsoidal inhomogeneities: applications in geoscience. *Computers & Geosciences*, **76**, 72–79.
- Bendsøe M.; Kikuchi N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **71**(2), 197–224.
- Bensoussan A.; Lions J.; Papanicolaou G. (2011). *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 374. American Mathematical Soc.
- Berryman J.; Borcea L.; Papanicolaou G.; Tsogka C. (2004). Statistical stability and time-reversal imaging in random media. In *Geometric Methods in Inverse Problems and PDE Control*, pp. 15–24. Springer.
- Bhattacharya K. (2003). *Microstructure of martensite: why it forms and how it gives rise to the shape-memory effect*, volume 2. Oxford University Press.
- Bigoni D.; Drugan W. (2007). Analytical derivation of cosserat moduli via homogenization of heterogeneous elastic materials. *Journal of Applied Mechanics*, **74**(4), 741–753.
- Borcea L.; Papanicolaou G.; Tsogka C.; Berryman J. (2002). Imaging and time reversal in random media. *Inverse Problems*, **18**(5), 1247.
- Borcea L.; Papanicolaou G.; Tsogka C. (2003). A resolution study for imaging and time reversal in. In *Inverse Problems: Theory and Applications: INdAM Workshop on Inverse Problems and Applications, June 3-9, 2002, Cortona, Italy: Special Session at AMS-UMI First Joint International Meeting on Inverse Boundary Problems and Applications, June 12-16, 2002, Pisa, Italy*, volume 333, p. 63. American Mathematical Soc.
- Borcea L.; Papanicolaou G.; Tsogka C. (2005). Interferometric array imaging in clutter. *Inverse Problems*, **21**(4), 1419.
- Borcea L.; Papanicolaou G.; Tsogka C. (2006a). Adaptive interferometric imaging in clutter and optimal illumination. *Inverse Problems*, **22**(4), 1405.

- Borcea L.; Papanicolaou G.; Tsogka C. (2006b). Coherent interferometric imaging in clutter: Geophysics, 71. *SI165–SI175*, **313**.
- Bowen R.; Wang C. (2008). *Introduction to vectors and tensors*, volume 2. Courier Corporation.
- Boyd J.; Lagoudas D. (1996). A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part i. the monolithic shape memory alloy. *International Journal of Plasticity*, **12**(6), 805–842.
- Brezis H. (1983). *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree].
- Buechner P.; Lakes R. (2003). Size effects in the elasticity and viscoelasticity of bone. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, **1**(4), 295–301.
- Castañeda P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **39**(1), 45–71.
- Castañeda P. (1996). Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **44**(6), 827–862.
- Castañeda P.; Suquet P. (1995). On the effective mechanical behavior of weakly inhomogeneous nonlinear materials. *European journal of mechanics. A. Solids*, **14**(2), 205–236.
- Castañeda P.; Suquet P. (1998). Nonlinear composites. *Advances in applied mechanics*, **34**(998), 171–302.
- Castañeda P.; Willis J. (1988). On the overall properties of nonlinearly viscous composites. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 416, pp. 217–244. The Royal Society.
- Cavalcante M.; Marques S.; Pindera M. (2007). Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials. part i: analysis. *Journal of Applied Mechanics*, **74**(5), 935–945.

- Cavalcante M.; Marques S.; Pindera M. (2008). Computational aspects of the parametric finite-volume theory for functionally graded materials. *Computational Materials Science*, **44**(2), 422–438.
- Cerrolaza M.; Sulem J.; Elbied A. (1999). A cosserat non-linear finite element analysis software for blocky structures. *Advances in Engineering Software*, **30**(1), 69–83.
- Charalambakis N. (2010). Homogenization techniques and micromechanics. a survey and perspectives. *Applied Mechanics Reviews*, **63**(3), 030803.
- Charalambakis N.; Murat F. (1989). Weak solutions to the initial-boundary value problem for the shearing of non-homogeneous thermoviscoplastic materials. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **113**(3-4), 257–265.
- Charalambakis N.; Murat F. (2006). Homogenization of stratified thermoviscoplastic materials. *Quarterly of applied mathematics*, **64**(2), 359–399.
- Charalambakis N.; Murat F. (2010). Stability by homogenization of thermoviscoplastic problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **20**(09), 1591–1616.
- Chatzigeorgiou G.; Lagoudas D. (2009). A constitutive model for high temperature smas exhibiting viscoplastic behavior. In *SPIE Smart Structures and Materials+ Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*, pp. 72890U–72890U. International Society for Optics and Photonics.
- Chatzigeorgiou G.; Charalambakis N.; Murat F. (2008). Homogenization problems of a hollow cylinder made of elastic materials with discontinuous properties. *International Journal of solids and structures*, **45**(18), 5165–5180.
- Chatzigeorgiou G.; Charalambakis N.; Murat F. (2009). Homogenization of a pressurized tube made of elastoplastic materials with discontinuous properties. *International Journal of Solids and Structures*, **46**(21), 3902–3913.

- Chen L.; Urquhart E.; Pindera M. (2005). Microstructural effects in multilayers with large moduli contrast loaded by flat punch. *AIAA journal*, **43**(5), 962–973.
- Chen W.; Fish J. (2001). A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *Journal of Applied Mechanics*, **68**(2), 153–161.
- Chen W.; Zhou K.; Keer L.; Wang Q. (2010). Modeling elasto-plastic indentation on layered materials using the equivalent inclusion method. *International Journal of Solids and Structures*, **47**(20), 2841–2854.
- Chen Z. (2011). Poroelastic model for induced stresses and deformations in hydrocarbon and geothermal reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **80**(1), 41–52.
- Cheng J.; Jordan E.; Walker K. (1999). Closed form solution for rectangular inclusions with quadratic eigenstrains. *International journal of engineering science*, **37**(10), 1261–1276.
- Cherkaev A.; Kohn R. (2012). *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, volume 29. Springer Science & Business Media.
- Cherkaev E. (2001). Inverse homogenization for evaluation of effective properties of a mixture. *Inverse Problems*, **17**(4), 1203.
- Chiu Y. (1977). On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space. *Journal of Applied Mechanics*, **44**(4), 587–590.
- Chiu Y. (1978). On the stress field and surface deformation in a half space with a cuboidal zone in which initial strains are uniform. *Journal of Applied Mechanics*, **45**(2), 302–306.
- Chiu Y. (1980). On the internal stresses in a half plane and a layer containing localized inelastic strains or inclusions. *Journal of Applied Mechanics*, **47**(2), 313–318.
- Christensen R. (2012). *Mechanics of composite materials*. Courier Corporation.

- Colombo L.; Giordano S. (2007). *Introduzione alla teoria della elasticità: meccanica dei solidi continui in regime lineare elastico*. Springer Science & Business Media.
- Cosserat E.; Cosserat F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Paris.
- Dascalu C.; Bilbie G.; Agiasofitou E. (2008). Damage and size effects in elastic solids: A homogenization approach. *International Journal of Solids and Structures*, **45**(2), 409–430.
- Doghri I.; Ouaar A. (2003). Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures: study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *International Journal of Solids and structures*, **40**(7), 1681–1712.
- Doyle T.; Tew A.; Warnick K.; Carruth B. (2009). Simulation of elastic wave scattering in cells and tissues at the microscopic level. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **125**(3), 1751–1767.
- D’Urso M. (2013). On the evaluation of the gravity effects of polyhedral bodies and a consistent treatment of related singularities. *Journal of Geodesy*, **87**(3), 239–252.
- D’Urso M. (2014a). Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies. *Journal of Geodesy*, **88**(1), 13–29.
- D’Urso M. (2014b). Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **120**(4), 349–372.
- D’Urso M. (2015a). The gravity anomaly of a 2d polygonal body having density contrast given by polynomial functions. *Surveys in Geophysics*, **36**(3), 391–425.
- D’Urso M. (2015b). A remark on the computation of the gravitational potential of masses with linearly varying density.
- D’Urso M.; Marmo F. (2015). Vertical stress distribution in isotropic half-spaces due to surface vertical loadings acting over polygonal domains. *Zeit. Ang. Math. Mech.*(2013c). doi, **10**, 1002.

- D'Urso M.; Trotta S. (2015). Comparative assessment of linear and bilinear prism-based strategies for terrain correction computations. *Journal of Geodesy*, **89**(3), 199–215.
- Duvaut G. (1976). Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus. In *Proceedings of the 14th IUTAM Congress*, pp. 119–132.
- Duvaut G.; Lions J. (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique*, volume 21. Dunod.
- Eftaxiopoulos D.; Atkinson C. (2005). A nonlinear, anisotropic and axisymmetric model for balloon angioplasty. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 461, pp. 1097–1128. The Royal Society.
- Eringen A. (1965). Linear theory of micropolar elasticity. Relazione tecnica, DTIC Document.
- Eringen A. (2002). *Nonlocal continuum field theories*. Springer Science & Business Media.
- Eshelby J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **241**(1226), 376–396.
- Eshelby J. (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 252, pp. 561–569. The Royal Society.
- Eshelby J. (1961). Elastic inclusions and inhomogeneities. *Progress in solid mechanics*, **2**(1), 89–140.
- Faivre G. (1969). Déformations de cohérence d'un précipité quadratique. *Physica status solidi (b)*, **35**(1), 249–259.
- Fang X.; Wang D.; Liu J. (2009). Multiple scattering of elastic waves in metal-matrix composite materials with high volume concentration of particles. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **28**(2), 377–386.

- Filippas S.; Makrakis G. (2003). Semiclassical wigner function and geometrical optics. *Multiscale Modeling & Simulation*, **1**(4), 674–710.
- Fish J.; Shek K.; Pandheeradi M.; Shephard M. (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **148**(1), 53–73.
- Forest S. (1998). Mechanics of generalized continua: construction by homogenization. *Le Journal de Physique IV*, **8**(PR4), Pr4–39.
- Forest S.; Sab K. (1998). Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, **25**(4), 449–454.
- Forest S.; Pradel F.; Sab K. (2001). Asymptotic analysis of heterogeneous cosserat media. *International Journal of Solids and Structures*, **38**(26), 4585–4608.
- Francfort G. (1983). Homogenization and linear thermoelasticity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **14**(4), 696–708.
- Francfort G.; Murat F. (1986). Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **94**(4), 307–334.
- Francfort G.; Murat F. (2009). The proofs of the optimal bounds for mixtures of two anisotropic conducting materials in two dimensions. *Mechanics of Materials*, **41**(4), 448–455.
- Francfort G.; Suquet P. (1986). Homogenization and mechanical dissipation in thermoviscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **96**(3), 265–293.
- Francfort G.; Leguillon D.; Suquet P. (1983a). Homogenization for linearly viscoelastic bodies. *Comptes Rendus De L'academie Des Sciences Serie I-Mathematique*, **296**(5), 287–290.
- Francfort G.; Nguyen Q.; Suquet P. (1983b). Thermodynamics and the homogenized thermomechanical behavior. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II*, **296**(14), 1007–1010.

- Franciosi P. (2005). On the modified green operator integral for polygonal, polyhedral and other non-ellipsoidal inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, **42**(11), 3509–3531.
- Fulleringer B.; Nelias D. (2010). On the tangential displacement of a surface point due to a cuboid of uniform plastic strain in a half-space. *Journal of Applied Mechanics*, **77**(2), 021014.
- Gao X.; Liu M. (2012). Strain gradient solution for the eshelby-type polyhedral inclusion problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **60**(2), 261–276.
- Gao X.; Ma H. (2010). Strain gradient solution for eshelby's ellipsoidal inclusion problem. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, pp. 2425–2446. The Royal Society.
- Georgiadis H.; Lykotrafitis G. (2001). A method based on the radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, **65**(1-3), 87–129.
- Georgiadis H.; Velgaki E. (2003). High-frequency rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects. *International Journal of Solids and Structures*, **40**(10), 2501–2520.
- Georgiadis H.; Vardoulakis I.; Lykotrafitis G. (2000). Torsional surface waves in a gradient-elastic half-space. *Wave Motion*, **31**(4), 333–348.
- Georgiadis H.; Vardoulakis I.; Velgaki E. (2004). Dispersive rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity. *Journal of Elasticity*, **74**(1), 17–45.
- Germain P. (1973). The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **25**(3), 556–575.
- Geymonat G.; Müller S.; Triantafyllidis N. (1993). Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity. *Archive for rational mechanics and analysis*, **122**(3), 231–290.

- Ghosh S.; Lee K.; Moorthy S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, **32**(1), 27–62.
- Ghosh S.; Lee K.; Raghavan P. (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, **38**(14), 2335–2385.
- Gourgiotis P.; Georgiadis H. (2008). An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple-stress elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, **45**(21), 5521–5539.
- Grabovsky Y.; Kohn R. (1995). Microstructures minimizing the energy of a two phase elastic composite in two space dimensions. i: the confocal ellipse construction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **43**(6), 933–947.
- Grabovsky Y.; Milton G. (1998). Exact relations for composites: Towards a complete solution. *Documenta Mathematica, Journal der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Extra*, **901**, 623–632.
- Grabovsky Y.; Milton G.; Sage D. (2000). Exact relations for effective tensors of composites: necessary conditions and sufficient conditions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **53**(3), 300–353.
- Grobby J.; Tsogka C.; Wirgin A. (2005). Simulation of seismic response in a city-like environment. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **25**(7), 487–504.
- Guedes J.; Kikuchi N. (1990). Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **83**(2), 143–198.
- Guinovart-Díaz R.; Rodríguez-Ramos R.; Bravo-Castillero J.; Sabina F.; Otero-Hernández J.; Maugin G. (2005). A recursive asymptotic homogenization scheme for multi-phase fibrous elastic composites. *Mechanics of materials*, **37**(11), 1119–1131.

- Hammer P.; Marlowe O.; Stroud A. (1956). Numerical integration over simplexes and cones. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, pp. 130–137.
- Hasegawa H.; Lee V.; Mura T. (1992). The stress fields caused by a circular cylindrical inclusion. *Journal of applied mechanics*, **59**(2S), S107–S114.
- Hashin Z. (1983). Analysis of composite materials-a survey. *Journal of Applied Mechanics*, **50**(3), 481–505.
- Hill R. (1963). Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **11**(5), 357–372.
- Hill R. (1965a). Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13**(2), 89–101.
- Hill R. (1965b). Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13**(2), 89–101.
- Hill R. (1965c). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, pp. 213–222.
- Hill R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **15**(2), 79–95.
- Hou T. (1988). Homogenization for semilinear hyperbolic systems with oscillatory data. *Communications on pure and applied mathematics*, **41**(4), 471–495.
- Hou T.; Xin X. (1992). Homogenization of linear transport equations with oscillatory vector fields. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **52**(1), 34–45.
- Hu S. (1989). Stress from a parallelepipedic thermal inclusion in a semispace. *Journal of Applied Physics*, **66**(6), 2741–2743.
- Huang M.; Zou W.; Zheng Q. (2009). Explicit expression of eshelby tensor for arbitrary weakly non-circular inclusion in two-dimensional elasticity. *International Journal of Engineering Science*, **47**(11), 1240–1250.

- Huang M.; Wu P.; Guan G.; Liu W. (2011). Explicit expressions of the eshelby tensor for an arbitrary 3d weakly non-spherical inclusion. *Acta Mechanica*, **217**(1-2), 17–38.
- Hwang S.; Tzavaras A. (2002). Kinetic decomposition of approximate solutions to conservation laws: Application to relaxation and diffusion-dispersion approximations*.
- Hwu C.; Ting T. (1989). Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptic inclusion. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **42**(4), 553–572.
- Idiart M.; Moulinec H.; Castañeda P.; Suquet P. (2006). Macroscopic behavior and field fluctuations in viscoplastic composites: second-order estimates versus full-field simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **54**(5), 1029–1063.
- Jabin P.; Tzavaras A. (2009). Kinetic decomposition for periodic homogenization problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **41**(1), 360–390.
- Jacq C.; Nelias D.; Lormand G.; Girodin D. (2002). Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of Tribology*, **124**(4), 653–667.
- Jaswon M.; Bhargava R. (1961). Two-dimensional elastic inclusion problems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 57, pp. 669–680. Cambridge Univ Press.
- Jin X.; Keer L.; Wang Q. (2009a). Analytical solution for the stress field of eshelby's inclusion of polygonal shape. In *ASME/STLE 2009 International Joint Tribology Conference*, pp. 487–489. American Society of Mechanical Engineers.
- Jin X.; Keer L.; Wang Q. (2009b). New green's function for stress field and a note of its application in quantum-wire structures. *International Journal of Solids and Structures*, **46**(21), 3788–3798.

- Jin X.; Wang Z.; Zhou Q.; Keer L.; Wang Q. (2014). On the solution of an elliptical inhomogeneity in plane elasticity by the equivalent inclusion method. *Journal of Elasticity*, **114**(1), 1–18.
- Johannesson B.; Pedersen O. B. (1998). Analytical determination of the average eshelby tensor for transversely isotropic fiber orientation distributions. *Acta materialia*, **46**(9), 3165–3173.
- Kalamkarov A.; Kolpakov A. (1997). *Analysis, design, and optimization of composite structures*. Wiley.
- Kalamkarov A.; Andrianov I.; Danishevsâ V. e altri (2009). Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, **62**(3), 030802.
- Kang H. (2009). Conjectures of pólya-szegö and eshelby, and the newtonian potential problem: A review. *Mechanics of Materials*, **41**(4), 405–410.
- Kawashita M.; Nozaki H. (2001). Eshelby tensor of a polygonal inclusion and its special properties. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, **64**(1), 71–84.
- Khachaturyan A. (2013). *Theory of structural transformations in solids*. Courier Corporation.
- Khare G.; Chandra N.; Silvain J. (2008). Application of eshelby's tensor and rotation matrix for the evaluation of thermal transport properties of composites. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **15**(2), 117–129.
- Khatam H.; Pindera M. (2009). Parametric finite-volume micromechanics of periodic materials with elastoplastic phases. *International Journal of Plasticity*, **25**(7), 1386–1411.
- Kim B.; Lee H. (2010). Closed form solution of the exterior-point eshelby tensor for an elliptic cylindrical inclusion. *Journal of Applied Mechanics*, **77**(2), 024503.

- Kim J. (1996). Dynamic self-consistent analysis for elastic wave propagation in fiber reinforced composites. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **100**(4), 2002–2010.
- Kröner E. (1958). Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Zeitschrift für Physik*, **151**(4), 504–518.
- Kröner E. (1972). *Statistical continuum mechanics*. Springer.
- Kuo C. (2007). Stress disturbances caused by the inhomogeneity in an elastic half-space subjected to contact loading. *International journal of solids and structures*, **44**(3), 860–873.
- Lagoudas D.; Chatzigeorgiou G.; Kumar P. (2009). Modelling and experimental study of simultaneous creep and transformation in polycrystalline high-temperature shape memory alloys. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*.
- Lee J.; Johnson W. (1977). Elastic strain energy and interactions of thin square plates which have undergone a simple shear. *Scripta Metallurgica*, **11**(6), 477–484.
- Li S.; Wang G. (2008). *Introduction to micromechanics and nanomechanics*, volume 278. World Scientific.
- Li S.; Sauer R.; Wang G. (2005). A circular inclusion in a finite domain i. the dirichlet-eschelby problem. *Acta mechanica*, **179**(1-2), 67–90.
- Li S.; Sauer R.; Wang G. (2007). The eschelby tensors in a finite spherical domain-part i: theoretical formulations. *Journal of applied mechanics*, **74**(4), 770–783.
- Li Z.; Yang L. (2002). The application of the eschelby equivalent inclusion method for unifying modulus and transformation toughening. *International journal of solids and structures*, **39**(20), 5225–5240.
- Lions J. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*, volume 31. Dunod Paris.

- Lions P.; Perthame B.; Tadmor E. (1994a). A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations. *Journal of the American Mathematical Society*, **7**(1), 169–191.
- Lions P.; Perthame B.; Tadmor E. (1994b). Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems. *Communications in mathematical physics*, **163**(2), 415–431.
- List R.; Silberstein J. (1966). Two-dimensional elastic inclusion problems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 62, pp. 303–311. Cambridge Univ Press.
- Liu S.; Wang Q. (2005). Elastic fields due to eigenstrains in a half-space. *Journal of applied mechanics*, **72**(6), 871–878.
- Liu S.; Jin X.; Wang Z.; Keer L.; Wang Q. (2012). Analytical solution for elastic fields caused by eigenstrains in a half-space and numerical implementation based on fft. *International Journal of Plasticity*, **35**, 135–154.
- Love B.; Batra R. (2006). Determination of effective thermomechanical parameters of a mixture of two elastothermoviscoplastic constituents. *International Journal of Plasticity*, **22**(6), 1026–1061.
- Lubarda V.; Markenscoff X. (1998). On the absence of eshelby property for non-ellipsoidal inclusions. *International journal of solids and structures*, **35**(25), 3405–3411.
- Lukkassen D.; Milton G. (2002). On hierarchical structures and reiterated homogenization. *Function spaces, interpolation theory and related topics (Lund, 2000)*, pp. 355–368.
- Ma H.; Gao X. (2010). Eshelby’s tensors for plane strain and cylindrical inclusions based on a simplified strain gradient elasticity theory. *Acta mechanica*, **211**(1-2), 115–129.

- Ma L.; Korsunsky A. (2014). The principle of equivalent eigenstrain for inhomogeneous inclusion problems. *International Journal of Solids and Structures*, **51**(25), 4477–4484.
- Markenscoff X. (1997). On the shape of the eshelby inclusions. *Journal of elasticity*, **49**(2), 163–166.
- Markenscoff X. (1998). Inclusions with constant eigenstress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **46**(12), 2297–2301.
- Markov K. (2000a). Elementary micromechanics of heterogeneous media. In *Heterogeneous media*, pp. 1–162. Springer.
- Markov K. (2000b). Elementary micromechanics of heterogeneous media. In *Heterogeneous media*, pp. 1–162. Springer.
- Maugin G. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*, volume 7. Cambridge University Press.
- Mazur-Śniady K.; Woźniak C.; Wierzbicki E. (2004). On the modelling of dynamic problems for plates with a periodic structure. *Archive of Applied mechanics*, **74**(3-4), 179–190.
- Michel J.; Suquet P. (2004). Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **193**(48), 5477–5502.
- Milgrom M.; Shtrikman S. (1992). The energy of inclusions in linear media exact shape-independent relations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **40**(5), 927–937.
- Milton G. (2002). *The theory of composites*, volume 6. Cambridge university press.
- Mindlin R. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**(1), 51–78.

- Mindlin R. (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, **1**(4), 417–438.
- Moulinec H.; Suquet P. (2003a). Intraphase strain heterogeneity in nonlinear composites: a computational approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **22**(5), 751–770.
- Moulinec H.; Suquet P. (2003b). Intraphase strain heterogeneity in nonlinear composites: a computational approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **22**(5), 751–770.
- Mühlhaus H.; Sulem J.; Unterreiner P. (1997). Discrete and continuous models for dry masonry columns. *Journal of engineering mechanics*, **123**(4), 399–403.
- Muller W.; Harris D.; Dedhia D. (1994). Stress intensity factors of two-dimensional and three-dimensional cracks next to a thermally mismatched inclusion. *Journal of Applied Mechanics*, **61**(3), 731–735.
- Mura T. (1987). *Micromechanics of defects in solids*, volume 3. Springer Science and Business Media.
- Mura T. (1988). Inclusion problems. *Applied Mechanics Reviews*, **41**(1), 15–20.
- Murat F. (1978). Compacité par compensation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **5**(3), 489–507.
- Murat F.; Tartar L. (1997). H-convergence, topics in the mathematical modelling of composite materials, 21–43. *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl*, **31**.
- Nemat-Nasser S. (1999a). Averaging theorems in finite deformation plasticity. *Mechanics of Materials*, **31**(8), 493–523.
- Nemat-Nasser S. (1999b). Averaging theorems in finite deformation plasticity. *Mechanics of Materials*, **31**(8), 493–523.
- Nemat-Nasser S.; Hori M. (1999). *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*.

- Nie G.; Batra R. (2010a). Exact solutions and material tailoring for functionally graded hollow circular cylinders. *Journal of Elasticity*, **99**(2), 179–201.
- Nie G.; Batra R. (2010b). Material tailoring and analysis of functionally graded isotropic and incompressible linear elastic hollow cylinders. *Composite structures*, **92**(2), 265–274.
- Nishiwaki S.; Frecker M.; Min S.; Kikuchi N. (1998). Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method.
- Nogi T.; Kato T. (1997). Influence of a hard surface layer on the limit of elastic contact-part i: Analysis using a real surface model. *Journal of tribology*, **119**(3), 493–500.
- Nozaki H.; Taya M. (1997). Elastic fields in a polygon-shaped inclusion with uniform eigenstrains. *Journal of applied mechanics*, **64**(3), 495–502.
- Nozaki H.; Taya M. (2001). Elastic fields in a polyhedral inclusion with uniform eigenstrains and related problems. *Journal of Applied mechanics*, **68**(3), 441–452.
- Ojaghnezhad F.; Shodja H. M. (2009). A lamellar inhomogeneity near a multiphase reinforcement. *Acta mechanica*, **206**(1-2), 39–52.
- Owen D. (1972). Analysis of fibre-reinforced materials by an initial strain method. *Fibre Science and Technology*, **5**(1), 37–59.
- Park H.; Lakes R. (1986). Cosserat micromechanics of human bone: strain redistribution by a hydration sensitive constituent. *Journal of biomechanics*, **19**(5), 385–397.
- Parnell W.; Abrahams I. (2008). Homogenization for wave propagation in periodic fibre-reinforced media with complex microstructure. i-theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **56**(7), 2521–2540.
- Pasternak E.; M. H. (2005). Generalised homogenisation procedures for granular materials. In *Mathematics and Mechanics of Granular Materials*, pp. 199–229. Springer.

- Peerlings R.; Fleck N. (2004). Computational evaluation of strain gradient elasticity constants. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, **2**(4).
- Perdahcioğlu E.; Geijselaers H. (2011). Constitutive modeling of two phase materials using the mean field method for homogenization. *International Journal of Material Forming*, pp. 93–102.
- Perthame B.; Tzavaras A. (2000). Kinetic formulation for systems of two conservation laws and elastodynamics. *Archive for rational mechanics and analysis*, **155**(1), 1–48.
- Pindera M.; Khatam H.; Drago A.; Bansal Y. (2009). Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: a critical review and emerging approaches. *Composites Part B: Engineering*, **40**(5), 349–378.
- Polyzos D. (2005). 3d frequency domain bem for solving dipolar gradient elastic problems. *Computational Mechanics*, **35**(4), 292–304.
- Polyzos D.; Tsepoura K.; Tsinopoulos S.; Beskos D. (2003). A boundary element method for solving 2-d and 3-d static gradient elastic problems. part i: Integral formulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **192**(26), 2845–2873.
- Polyzos D.; Tsepoura K.; Beskos D. (2007). Bem solutions of frequency domain gradient elastodynamic 3-d problems. *Electronic Journal of Boundary Elements*, **1**(2).
- Rodin G. (1996). Eshelby's inclusion problem for polygons and polyhedra. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **44**(12), 1977–1995.
- Ru C. (1999). Analytic solution for eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane. *Journal of applied mechanics*, **66**(2), 315–322.
- Ru C.; Schiavone P. (1996). On the elliptic inclusion in anti-plane shear. *Mathematics and Mechanics of Solids*, **1**(3), 327–333.

- Rudnicki J. (2002). Eshelby transformations, pore pressure and fluid mass changes, and subsidence. In *Second Biot Conference on Poromechanics (Poromechanics II)*, Grenoble, France, August, pp. 26–28.
- Rudnicki J. (2011). *Eshelby's technique for analyzing inhomogeneities in geomechanics*. Springer.
- Rudnicki J. e altri (1999). Alteration of regional stress by reservoirs and other inhomogeneities: stabilizing or destabilizing. In *9th ISRM Congress*. International Society for Rock Mechanics.
- Saad Y. (1987). On the l nczos method for solving symmetric linear systems with several right-hand sides. *Mathematics of computation*, **48**(178), 651–662.
- Saada A. (2013). *Elasticity: theory and applications*. Elsevier.
- Sánchez-Palencia E. (1980). Non-homogeneous media and vibration theory. In *Non-homogeneous media and vibration theory*, volume 127.
- Sankaran R.; Laird C. (1976). Deformation field of a misfitting inclusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **24**(4), 251–262.
- Sendeckyj G. (1970). Elastic inclusion problems in plane elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, **6**(12), 1535–1543.
- Seo K.; Mura T. (1979). The elastic field in a half space due to ellipsoidal inclusions with uniform dilatational eigenstrains. *Journal of Applied Mechanics*, **46**(3), 568–572.
- Sevostianov I.; Kachanov M.; Drach B. (2014). On the effect of interactions of inhomogeneities on the overall elastic and conductive properties. *International Journal of Solids and Structures*, **51**(25), 4531–4543.
- Shehadeh M.; Zbib H.; De la Rubia T. (2005). Multiscale dislocation dynamics simulations of shock compression in copper single crystal. *International journal of plasticity*, **21**(12), 2369–2390.

- Sherman D. (1959). On the problem of plane strain in non-homogeneous media. *Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity*, pp. 3–20.
- Shi J.; Li Z. (2006). An approximate solution of the interaction between an edge dislocation and an inclusion of arbitrary shape. *Mechanics Research Communications*, **33**(6), 804–810.
- Shin B.; Gopaul D.; Fienberg S.; Kwon H. J. (2015). Application of eshelby's solution to elastography for diagnosis of breast cancer. *Ultrasonic imaging*, pp. 1–22.
- Shodja H.; Ojaghnezhad F. (2007). A general unified treatment of lamellar inhomogeneities. *Engineering Fracture Mechanics*, **74**(9), 1499–1510.
- Shodja H.; Rad I.; Soheilifard R. (2003). Interacting cracks and ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **51**(5), 945–960.
- Sigmund O.; Torquato S. (1999). Design of smart composite materials using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, **8**(3), 365.
- Smyshlyaev V. (2009). Propagation and localization of elastic waves in highly anisotropic periodic composites via two-scale homogenization. *Mechanics of Materials*, **41**(4), 434–447.
- Smyshlyaev V.; Cherednichenko K. (2000). On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**(6), 1325–1357.
- Smyshlyaev V.; Fleck N. (1994). Bounds and estimates for linear composites with strain gradient effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **42**(12), 1851–1882.
- Soltanzadeh H.; Hawkes C. (2012). Evaluation of caprock integrity during pore pressure change using a probabilistic implementation of a closed-form poroelastic model. *International Journal of Greenhouse Gas Control*, **7**, 30–38.

- Soltanzadeh H.; Hawkes C.; Sharma J. (2007). Poroelastic model for production- and injection-induced stresses in reservoirs with elastic properties different from the surrounding rock. *International Journal of Geomechanics*, **7**(5), 353–361.
- Stagni L. (1982). On the elastic field perturbation by inhomogeneities in plane elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **33**(3), 315–325.
- Stefanou I.; Sulem J.; Vardoulakis I. (2008). Three-dimensional cosserat homogenization of masonry structures: elasticity. *Acta Geotechnica*, **3**(1), 71–83.
- Stefanou I.; Sulem J.; Vardoulakis I. (2010). Homogenization of interlocking masonry structures using a generalized differential expansion technique. *International Journal of Solids and Structures*, **47**(11), 1522–1536.
- Suiker A.; Chang C.; de Borst R.; Esvelde C. (1999). Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties. part 1: Formulation of the boundary value problem. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **18**(5), 749–768.
- Sulem J.; Mühlhaus H. (1997). A continuum model for periodic two-dimensional block structures. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, **2**(1), 31–46.
- Sun X.; Choi K.; L. W. N.; Khaleel M. (2009). Predicting failure modes and ductility of dual phase steels using plastic strain localization. *International Journal of Plasticity*, **25**(10), 1888–1909.
- Suquet P. (1982). Plasticité et homogénéisation, these d'état, univ. *Pierre et Marie Curie*.
- Suquet P. (1983). Limit analysis and homogenization. *Comptes Rendus De L'Academie des Sciences Serie II*, **296**(18), 1355–1358.
- Suquet P. (1987). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. *Homogenization techniques for composite media*, **272**, 193–278.

- Suquet P. (1993). Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **41**(6), 981–1002.
- Suquet P. (2005). On the effect of small fluctuations in the volume fraction of constituents on the effective properties of composites. *Comptes Rendus Mecanique*, **333**(3), 219–226.
- Suzuki K.; Kikuchi N. (1991). A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **93**(3), 291–318.
- Takao Y.; Taya M.; Chou T. (1981). Stress field due to a cylindrical inclusion with constant axial eigenstrain in an infinite elastic body. *Journal of Applied Mechanics*, **48**(4), 853–858.
- Tanaka K.; Mori T. (1970). The hardening of crystals by non-deforming particles and fibres. *Acta Metallurgica*, **18**(8), 931–941.
- Tang K. (2007). *Mathematical methods for engineers and scientists*. Springer.
- Tartar L. (1976). Quelques remarques sur l’homogénéisation. In *Functional Analysis and Numerical Analysis, Proceedings of the Japan-France Seminar*, pp. 469–482.
- Tartar L. (1977). Homogénéisation et compacité par compensation. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)*, pp. 1–12.
- Tartar L. (1984). Etude des oscillations dans les equations aux derivees partielles non lineaires. In *Trends and applications of pure mathematics to mechanics*, pp. 384–412. Springer.
- Tartar L. (1995). Beyond young measures. *Meccanica*, **30**(5), 505–526.
- Tartar L. (2002). Mathematical tools for studying oscillations and concentrations: from young measures to h-measures and their variants. In *Multiscale problems in science and technology*, pp. 1–84. Springer.

- Taya M.; H. N. (1997). Elastic fields in a polygon-shaped inclusion with uniform eigenstrains. *Journal of applied mechanics*, **64**, 495.
- Tsinopoulos S.; Verbis J.; Polyzos D. (2000). An iterative effective medium approximation for wave dispersion and attenuation predictions in particulate composites. *Advanced Composites Letters*, **9**(3), 193–200.
- Tsogka C.; Papanicolaou G. (2002). Time reversal through a solid–liquid interface and super-resolution. *Inverse Problems*, **18**(6), 1639.
- Tsukrov I.; Drach B. (2010). Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *International Journal of Solids and Structures*, **47**(1), 25–33.
- Van der Sluis O.; Schreurs P.; Meijer H. (1999). Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation. *Mechanics of materials*, **31**(11), 743–759.
- Verbis J.; Kattis S.; Tsinopoulos S.; Polyzos D. (2001). Wave dispersion and attenuation in fiber composites. *Computational mechanics*, **27**(3), 244–252.
- Verbis J.; Tsinopoulos S.; Polyzos D. (2002). Elastic wave propagation in fiber reinforced composite materials with non-uniform distribution of fibers. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **3**(6), 803–814.
- Visintin A. (2008). Homogenization of nonlinear visco-elastic composites. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **89**(5), 477–504.
- Voyiadjis G.; Deliktas B. (2010). Modeling of strengthening and softening in inelastic nanocrystalline materials with reference to the triple junction and grain boundaries using strain gradient plasticity. *Acta mechanica*, **213**(1-2), 3–26.
- Waldvogel J. (1979). The newtonian potential of homogeneous polyhedra. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **30**(2), 388–398.

- Walpole L. (1967). The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **300**(1461), 270–289.
- Walpole L. (1997). An inclusion in one of two joined isotropic elastic half-spaces. *IMA journal of applied mathematics*, **59**(2), 193–209.
- Walsh J. (2002). Subsidence above a planar reservoir. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, **107**(B9), ETG–6.
- Wang M.; Xu B. (2004). The arithmetic mean theorem of eshelby tensor for a rotational symmetrical inclusion. *Journal of Elasticity*, **77**(1), 13–23.
- Wang Z.; Jin X.; Zhou Q.; Ai X.; Keer L.; Wang Q. (2013). An efficient numerical method with a parallel computational strategy for solving arbitrarily shaped inclusions in elastoplastic contact problems. *Journal of Tribology*, **135**(3), 031401.
- Weinan E. (1992). Homogenization of linear and nonlinear transport equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **45**(3), 301–326.
- Weinberger C.; Cai W.; Barnett D. (2005). Lecture notes—elasticity of microscopic structures. *ME340—Stanford University*.
- Withers P.; Stobbs W.; Pedersen O. (1989). The application of the eshelby method of internal stress determination to short fibre metal matrix composites. *Acta metallurgica*, **37**(11), 3061–3084.
- Wu L.; Du S. (1995a). The elastic field caused by a circular cylindrical inclusion-part i: Inside the region $x_1^2 + x_2^2 < a^2$, $-\infty < x_3 < +\infty$ where the circular cylindrical inclusion is expressed by $x_1^2 + x_2^2 \leq a^2$, $-h \leq x_3 \leq h$. *Journal of applied mechanics*, **62**(3), 579–584.
- Wu L.; Du S. (1995b). The elastic field caused by a circular cylindrical inclusion-part ii: Inside the region $x_1^2 + x_2^2 > a^2$, $-\infty < x_3 < +\infty$. *Journal of applied mechanics-Transactions of the Asme*, **62**(3), 579–584.

- Wu L.; Du S. (1995c). The elastic field caused by a circular cylindrical inclusion-part ii: Inside the region $x_1^2 + x_2^2 > a^2$, $-\infty < x_3 < +\infty$ where the circular cylindrical inclusion is expressed by $x_1^2 + x_2^2 \leq a^2$, $-h \leq x_3 \leq h$. *Journal of applied mechanics*, **62**(3), 585–589.
- Yang R.; Mal A. (1994). Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **42**(12), 1945–1968.
- Yu H.; Sanday S. (1990a). Axisymmetric inclusion in a half space. *Journal of applied mechanics*, **57**(1), 74–77.
- Yu H.; Sanday S. (1990b). Axisymmetric inclusion in a half space. *Journal of applied mechanics*, **57**(1), 74–77.
- Yu H.; Sanday S. (1991). Elastic field in joined semi-infinite solids with an inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, **434**(1892), 521–530.
- Zaoui A. (2002). Continuum micromechanics: survey. *Journal of Engineering Mechanics*, **128**(8), 808–816.
- Zaslavsky G. (2002). Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, **371**(6), 461–580.
- Zheng Q. (1993). Two-dimensional tensor function representation for all kinds of material symmetry. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 443, pp. 127–138. The Royal Society.
- Zheng Q. (1994). Theory of representations for tensor functions-a unified invariant approach to constitutive equations. *Applied Mechanics Reviews*, **47**(11), 545–587.
- Zheng Q.; Du D. (2001). An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **49**(11), 2765–2788.
- Zheng Q.; Zou W. (2000). Irreducible decompositions of physical tensors of high orders. *Journal of engineering mathematics*, **37**(1-3), 273–288.

- Zheng Q.; Zhao Z.; Du D. (2006). Irreducible structure, symmetry and average of eshelby's tensor fields in isotropic elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **54**(2), 368–383.
- Zhou K.; Chen W.; Keer L.; Wang Q. (2009). A fast method for solving three-dimensional arbitrarily shaped inclusions in a half space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198**(9), 885–892.
- Zhou K.; Chen W.; Keer L.; Ai X.; Sawamiphakdi K.; Glaws P.; Wang Q. (2011a). Multiple 3d inhomogeneous inclusions in a half space under contact loading. *Mechanics of Materials*, **43**(8), 444–457.
- Zhou K.; Keer L.; Wang Q. (2011b). Semi-analytic solution for multiple interacting three-dimensional inhomogeneous inclusions of arbitrary shape in an infinite space. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **87**(7), 617–638.
- Zhou Q.; Jin X.; Wang Z.; Wang J.; Keer L.; Wang Q. (2015). Numerical implementation of the equivalent inclusion method for 2d arbitrarily shaped inhomogeneities. *Journal of Elasticity*, **118**(1), 39–61.
- Zou W.; Zheng Q.; Du D.; Rychlewski J. (2001). Orthogonal irreducible decompositions of tensors of high orders. *Mathematics and Mechanics of Solids*, **6**(3), 249–267.
- Zou W.; He Q.; Huang M.; Zheng Q. (2010). Eshelby's problem of non-elliptical inclusions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **58**(3), 346–372.